CAPITOLUL 1

Introducere

1. INTRODUCERE

1.1. *Unităţi de măsură.*

Este necesar ca pentru fiecare mărime fizică să se definească un procedeu de măsurare şi o unitate de măsură. Dar, nu toate mărimile fizice din natură sunt independente şi, între unele dintre acestea există relaţii de dependenţă. Unităţile de măsură independente sunt unităţile *fundamentale* iar celelalte sunt unităţile *derivate.*

Din punctul de vedere al unităţilor primitive sau fundamentale alese, există două sisteme pe teritoriul ţării noastre:

1. Sisteme fizice, care au la bază unităţi pentru *lungime* (pentru măsurarea spaţiului), de *timp* şi de *masă.* Există două sisteme fizice, ***sistemul fizic CGS*** având ca unităţi fundamentale *centimetrul, gramul şi secunda*, precum şi ***sistemul internaţional SI*** având ca unităţi de bază

Tabelul 1.1.

Nr. crt.	Mărimea	Unitatea SI			
		Denumirea	**Simbolul**	**Expresia în unităţi fundam.**	**Ecuaţia dimensională**
1	***Lungimea***	**metrul**	**m**	**-**	**L**
2	***Masa***	**kilogramul**	**kg**	**-**	**M**
3	***Timpul***	**secunda**	**s**	**-**	**T**
4	Aria	metrul pătrat	m^2	-	L^2
5	Volumul	metrul cub	m^3	-	L^3
6	Viteza	metrul pe secundă	m/s	-	LT^{-1}
7	Acceleraţia	metrul pe secundă la pătrat	m/s^2	-	LT^{-2}
8	Densitatea	kilogramul pe metru cub	kg/m^3	-	ML^{-3}
9	Frecvenţa	hertz	Hz	s^{-1}	T^{-1}
10	Forţa	newton	N	kgm/s^2	LMT^{-2}
11	Presiunea	pascal	Pa	N/m^2	$L^{-1}MT^{-2}$
12	Energia, lucrul mecanic	joul	J	Nm	L^2MT^{-2}
13	Puterea	watt	W	Nm/s	L^2MT^{-3}
14	Unghiul plan	radian	rad	-	-
15	Viteza unghiulară	radian pe secundă	rad/s	-	T^{-1}
16	Acceleraţia unghiulară	radian pe secundă la patrat	rad/s^2	-	T^{-2}
17	Momentul unei forţe	newton metru	Nm	-	L^2MT^{-2}

metrul, kilogramul şi secunda. Acest sistem a devenit obligatoriu în ţara noastră începând cu cea de-a XI Conferinţă Internaţională de Măsuri şi Greutăţi (Paris 1960). În tabelul 1.1. se prezintă aceste unităţi derivate şi cu denumiri speciale. În acest sistem se pot folosi multipli şi submultipli zecimali care se exprimă folosind prefixe şi simboluri corespunzătoare.

2. Sisteme tehnice, care au la bază ca unităţi fundamentale cele pentru lungime, timp şi forţă. Un astfel de sistem a funcţionat şi în ţara noastră până în anul 1960 şi care a avut la bază metrul, kilogramul forţă şi secunda, şi este notat cu MKfS. Un sistem similar se foloseşte şi azi în ţările anglo-saxone, având ca unităţi fundamentale piciorul (0,3048 m), livra (4,45 N) şi secunda.

Definiţiile unităţilor fundamentale SI date de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi (CGPM), sunt:

1. Metrul este lungimea egală cu 1650763,73 lungimi de undă în vid a radiaţiei corespunzătoare tranziţiei între nivelele de energie $2p_{10}$ şi $5d_5$ ale atomului de kripton 86 (a XI conf. 1960).

2. Kilogramul este unitatea de masă, el este egal cu masa prototipului internaţional al kilogramului, realizat din platină iradiată ce se păstrează la Biroul Internaţional (CGPM 1889).

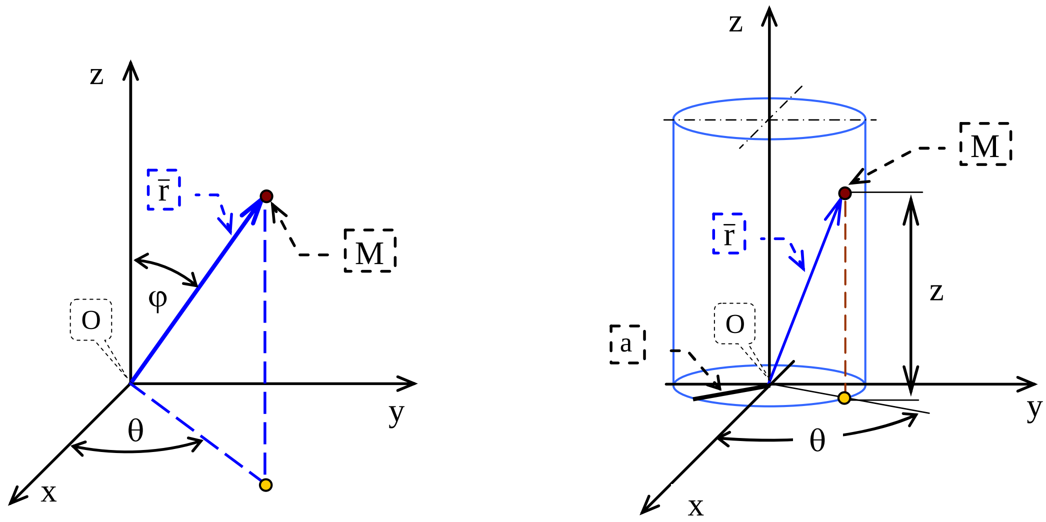
3. Secunda este durata a 9192631770 perioade ale radiaţiei care corespunde tranziţiei între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale ale atomului de cesiu 133 (CGPM 1967).

Pentru multipli şi submultipli se pot folosi următoarele câteva simboluri şi prefixe:

MULTIPLII		***Submultiplii***	
10^1 deca	**da**	10^{-1} deci	**d**
10^2 hecto	**h**	10^{-2} centi	**c**
10^3 kilo	**k**	10^{-3} mili	**m**
10^6 mega	**M**	10^{-6} micro	**μ**
10^9 Giga	**G**	10^{-9} nano	**n**
10^{12} Tera	**T**	10^{-12} pico	**p**

1.2. *Aspectul geometric al legăturilor*

Dacă un punct material este acţionat de un sistem de forţe $\overline{F}_i$ este limitat în mobilitatea sa (i se micşorează numărul gradelor de libertate) spunem că acest punct material este supus la legături. Aceste limite pot fi introduse prin obligarea punctului material de a rămâne în contact cu o suprafaţă, cu o curbă, sau plasat într-un punct geometric fix din spaţiu. Punctul material liber are 3 grade de libertate (sunt necesari 3 parametri scalari pentru a cunoaşte poziţia sa). În mecanică sunt utilizate diverse sisteme de referinţă: carteziene, sferice, cilindrice, polare, intrinseci, etc.



a) ***b)***

Fig. 1.1.

Relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele sferice (fig. 1.1.a):

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \qquad (1.1)$$

Domeniile de valori ale coordonatelor sferice sunt:

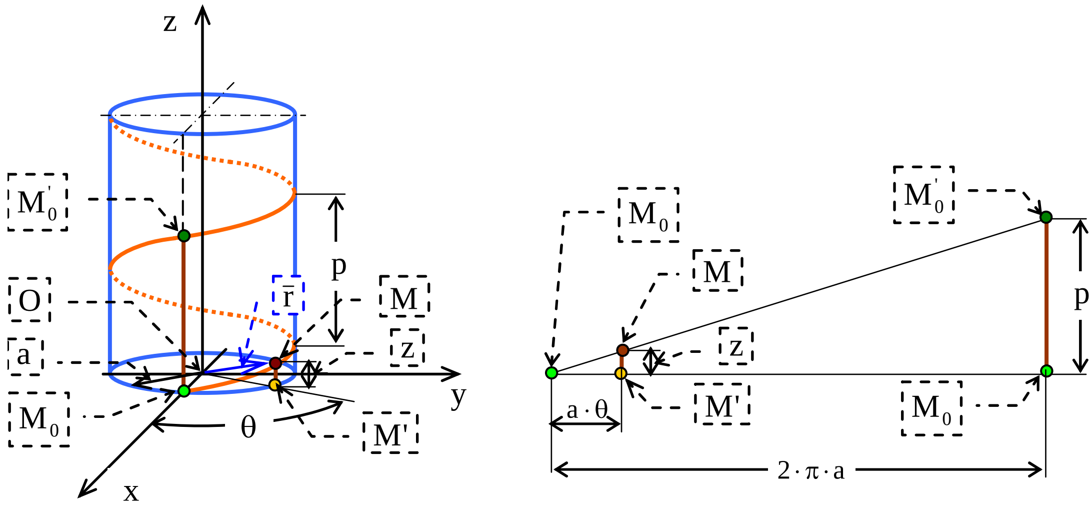
$$\begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} \qquad (1.2)$$

Relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele cilindrice (fig. 1.1.b):

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = a \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (1.3)$$

Domeniile de valori ale coordonatelor sferice sunt:

$$\begin{cases} 0 \le a \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty \le z \le \infty \end{cases} \tag{1.4}$$



a) ***b)***

Fig. 1.2.

Dacă punctul material este obligat să rămână în contact cu o suprafaţă fixă din spaţiu, punctul material are 2 grade de libertate. Dacă punctul material este obligat să rămână în contact cu o curbă fixă din spaţiu, atunci el va avea un singur grad de libertate (fig. 1.2. - *elicea cilindrica*).

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = a \cdot \sin\theta \\ z = (p/2\cdot\pi)\cdot\theta. \end{cases} \qquad \left[\text{asemanare}: \ \frac{z}{p} = \frac{a\cdot\theta}{2\cdot\pi\cdot a} \right] \tag{1.5}$$

1.3. *Aspectul mecanic al legăturilor*

Dacă un punct material este supus la legături, acestea acţionează asupra sa cu nişte forţe care se numesc ***forţe de legătură*** sau ***reacţiuni***. În cazul punctului material legat există **axioma legăturilor**: "*Unui punct material supus la legături i se pot suprima legăturile cu condiţia ca în locul lor să se introducă reacţiuni sau forţe de legătură care să aibă acelaşi efect mecanic cu cel pe care l-au avut legăturile*".

CAPITOLUL 2

Statica solidului rigid

2. STATICA SOLIDULUI RIGID

2.1. *Solidul rigid liber*

2.1.1. Probleme ale staticii solidului rigid liber

În general solidul rigid în realitatea obiectivă se află supus la legături, adică în interacţiune cu alte corpuri. Totuşi, pentru a utiliza relaţiile matematice, solidul rigid se idealizează considerând existenţa solidului rigid în stare liberă. Solidul rigid liber este un corp care poate ocupa orice poziţie în spaţiu (nu i se impune nici o restricţie geometrică), poziţia sa depinzând numai de forţele care-l acţionează.

Condiţia necesară şi suficientă ca un solid rigid liber să rămână în echilibru, este ca torsorul sistemului de forţe aplicate acestuia, calculat în raport cu un punct oarecare O din spaţiu, să se anuleze:

$$\tau_O(\overline{F}_i) = \begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_O = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Relaţiile (2.1) permit rezolvarea următoarelor două categorii de probleme:

a) *Cunoscând forţele care acţionează asupra unui solid liber, ca funcţii de coordonatele punctelor lor de aplicaţie, să se determine poziţia de echilibru a solidului.*

b) *Cunoscând poziţia solidului rigid liber, să se găsească sistemul de forţe care aplicatt asupra sa să-l menţină în această poziţie.*

Prima categorie de probleme are soluţie unică iar a doua categorie nu admite în general soluţie unică. Într-adevăr, dacă s-a găsit o soluţie, adică un sistem de forţe în echilibru, din acesta se pot deduce prin aplicarea regulii paralelogramului, o infinitate de sisteme cu efect nul, fiecare reprezentând o soluţie a problemei. Uneori natura datelor problemei asigură unicitatea soluţiei.

2.1.2. Condiţiile de echilibru ale solidului rigid liber

2.1.2.1. Sisteme de forţe oarecare în spaţiu

Proiectând ecuaţiile vectoriale (2.1) pe axele sistemului de coordonate carteziene Oxyz, obţinem următoarele şase ecuaţii scalare de echilibru pentru cazul sistemului de forţe spaţiale oarecare ce acţionează solidul rigid:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}\right) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

În unele cazuri practice, sistemele de forţe aflate în echilibru, constau numai din trei forţe. Cunoaşterea proprietăţilor specifice acestor sisteme cât şi a altor sisteme particulare de forţe, uşurează rezolvarea problemelor de statica solidului rigid prin reducerea numărului de ecuaţii scalare, particularizări ce vor rezulta din ecuaţiile (2.2).

2.1.2.2. Sisteme compuse din trei forţe

Presupunem un sistem de trei forţe $\overline{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ acţionând asupra unui solid rigid (fig. 2.1) în trei puncte necoliniare O_1, O_2 şi O_3.

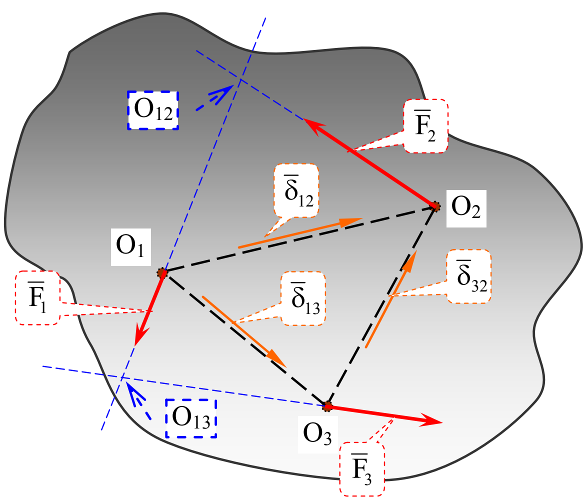


Fig. 2.1.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca acest sistem de forţe să fie în echilibru, este ca torsorul de reducere calculat în raport cu un punct oarecare să fie nul. În cazul a trei forţe această condiţie poate fi substituită astfel: *sistemul de trei forţe aplicate în trei puncte necoliniare, este în echilibru, dacă cele trei forţe sunt coplanare şi cu suporţii concurenţi în acelaşi punct sau paraleli cu o direcţie comună.*

Pentru a demonstra că forţele trebuie să fie coplanare se procedează astfel:

Torsorul în punctul O_1 trebuie să fie nul, adică:

$$\tau_{O_1}(\overline{F}_i) = \begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M}_{O_1} = 0 \end{cases}, \tag{2.3}$$

unde vectorul moment rezultant $\overline{M}_{O_1}$ este:

$$\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_1) + \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_2) + \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_3) = 0,$$

însă $\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_1) = 0$, deoarece $\overline{F}_1$ este aplicată în O_1.

Deci

$$\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_2) + \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_3) = 0 \;\Big|\cdot \overline{\delta}_{12},$$

$$\overline{\delta}_{12} \cdot \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_2) + \overline{\delta}_{12} \cdot \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_3) = 0. \tag{2.4}$$

Dar momentul forţei $\overline{F}_2$ în raport cu axa O_1O_2 este nul deoarece este aplicată pe această axă, $\overline{\delta}_{12} \cdot \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_2) = 0$.

Din relaţia (2.4) rezultă că $\overline{\delta}_{12} \cdot \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_3) = 0$, respectiv momentul forţei $\overline{F}_3$ în raport cu axa O_1O_2 este nul. Pentru a fi nul, această forţă ($\overline{F}_3$) trebuie să fie situată în planul definit de cele trei puncte necoliniare O_1, O_2 şi O_3. Prin raţionamente analoge se concluzionează că şi forţele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ sunt situate în acelaşi plan definit de punctele O_1, O_2 şi O_3.

Pentru a demonstra că suporturile forţelor sunt concurente sau paralele se procedează astfel:

a) Presupunem că forţele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ sunt concurente într-un punct O_{12} (fig. 2.1) şi scriind relaţia momentului rezultant calculat în raport cu acest punct, ca sumă de momente ale forţelor sistemului $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$, se obţine:

$$\overline{M}_{O_{12}}(\overline{F}_3) = 0,$$

dar $\overline{F}_3 \neq 0$ de unde rezultă că suportul forţei $\overline{F}_3$ trebuie să treacă prin O_{12}.

Deci cele trei forţe au suporturile concurente în O_{12}.

b) Presupunem că forţele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ sunt paralele iar forţa $\overline{F}_3$ nu-i paralelă cu acestea, fapt care ar conduce la concurenţa lui $\overline{F}_3$ cu suportul lui $\overline{F}_1$. Conform celor de la punctul ***a)*** ar trebui ca şi suportul lui $\overline{F}_2$ să fie concurent în acelaşi punct cea ce contrazice ipoteza (paralelism între $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$), deci şi $\overline{F}_3$ este paralelă cu direcţia comună a forţelor $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$.

2.1.2.3. Sisteme de forţe concurente

Considerăm punctul de concurenţă al forţelor chiar punctul ce coincide cu originea sistemului de axe O. Deoarece momentele axiale ale tuturor forţelor sunt nule în raport cu axele sistemului de referinţă, din cele şase condiţii (2.2), rămân ca şi condiţii scalare de echilibru numai următoarele trei relaţii:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

2.1.2.4. Sisteme de cupluri

Întrucât pentru sistemele de cupluri ecuaţiile de proiecţii sunt identic satisfăcute, rămân distincte, ca şi condiţii scalare de echilibru, numai cele trei ecuaţii de momente, adică:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}\right) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

2.1.2.5. Sisteme de forţe coplanare

Deoarece alegerea sistemului de referinţă este arbitrară se consideră planul de acţiune al sistemului de forţe ce acţionează asupra rigidului suprapus cu planul xOy al triedrului de referinţă. Această alegere impune $F_{ix} = 0$ şi $z_i = 0$ şi ecuaţiile scalare de echilibru (2.2) se reduc la următoarele:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix} \right) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Se poate afirma aşadar că pentru un sistem de forţe coplanare există numai trei ecuaţii scalare de echilibru: două ecuaţii de proiecţii şi o ecuaţie de momente.

2.1.2.6. Sisteme de forţe paralele

Alegând judicios sistemul de referinţă, adică axa Oz după direcţia comună a forţelor (această alegere nu diminuează din generalitatea problemei), caz în care $F_{ix} = 0$ şi $F_{iy} = 0$, ecuaţiile scalare de echilibru de forma (2.2) se reduc la următoarele trei:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \cdot F_i \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot F_i \right) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Deci pentru un sistem de forţe paralele există trei ecuaţii scalare de echilibru, o ecuaţie de proiecţii şi două ecuaţii de momente.

2.2. Echilibrul solidului rigid supus la legături ideale

Legăturile pot fi suprimate introducând în locul acestora reacţiunile, forţele de legătură care, din punct de vedere mecanic sunt echivalente cu legăturile. Se eliberează solidul de legături, transformându-l într-unul liber, doar acţionat de forţele efectiv aplicate şi cele de legătură. În acest caz, condiţia necesară şi suficientă ca solidul rigid sa fie în echilibru este ca torsorul tuturor forţelor efective şi de legătură calculat într-un punct oarecare să fie nul.

Legăturile ideale ale solidului rigid:

- *reazemul simplu (fig. 2.2)*: un corp care este obligat să rămână în permanenţă în contact cu un alt corp printr-un punct *A*, atunci el este rezemat simplu. Această legătură micşorează numărul gradelor de libertate cu o unitate iar din punct de vedere mecanic introduce o singură necunoscută scalară (mărimea interacţiunii).

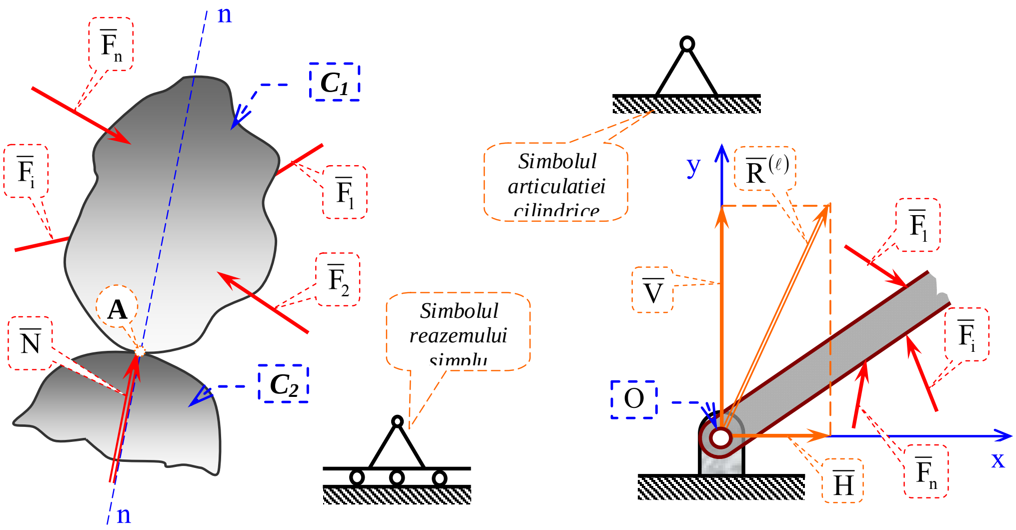


Fig. 2.2. *Fig. 2.3.*

- *articulaţii:*
- *articulaţia sferică (fig. 2.4)*: se întâlneşte la corpurile acţionate de forţele spaţiale şi este realizată prin imobilizarea unui punct al solidului rigid într-un punct geometric din spaţiu. Geometric acest lucru micşorează numărul gradelor de libertate cu trei, iar mecanic introduce trei necunoscute.

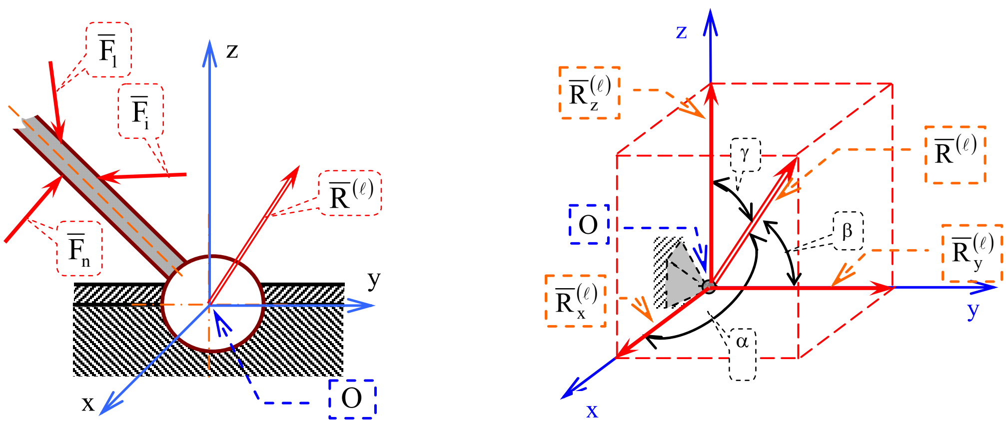


Fig. 2.4.

- *articulaţia cilindrică (fig. 2.3)*: reduce din punct de vedere geometric numărul gradelor de libertate cu două unităţi, iar din punct de vedere mecanic introduce două necunoscute. Dacă corpul este prin obligarea unui punct al său sa se suprapună cu un punct fix din spaţiu se realizează articulaţia cilindrică.
- *încastrarea (fig. 2.5)*: legătura solidului rigid care îl imobilizează în totalitate. Deci, geometric aceasta reduce numărul gradelor de libertate la 0, iar mecanic introduce 6 necunoscute $\left[\overline{R}_x^{(\ell)},\ \overline{R}_y^{(\ell)},\ \overline{R}_z^{(\ell)};\ \overline{M}_{Ox}^{(\ell)},\ \overline{M}_{Oy}^{(\ell)},\ \overline{M}_{Oz}^{(\ell)}\right]$. Capătul încastrat în perete este acţionat de o infinitate de forţe $\overline{p}$ ale caror legi

de distributie sunt necunoscute. Având în vedere că sistemul ecuatiilor de

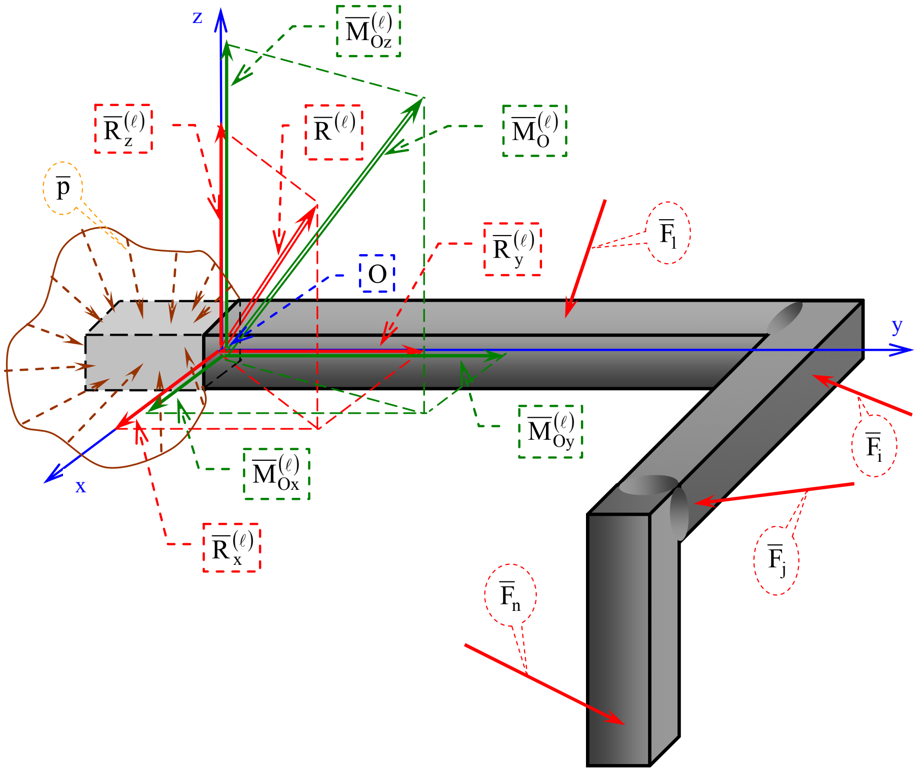


Fig. 2.5.

echilibru are 6 ecuaţii, nu putem rezolva problema reacţiunii din încastrare, determinând fiecare din cele o infinitate de forţe $\overline{p}$. Putem însă calcula torsorul sistemului de forţe de legatura $\overline{p}$, în centrul de greutate *O* al secţiunii de încastrare, care va fi constituit din vectorul rezultant $\overline{R}^{(\ell)}$ şi vectorul moment rezultant $\overline{M}^{(\ell)}$.

2.a. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

Sistemul de corpuri este construit dintr-o mulţime de corpuri aflate în interacţiune mecanică permanentă. Problemele de sisteme de corpuri se pot rezolva prin metode bazate pe două teoreme:

Teorema solidificării:

Dacă un sistem deformabil de corpuri rigide este în echilibru sub acţiunea unui sistem de forţe efectiv aplicate, el va rămâne în echilibru şi dacă se solidifică corpurile între ele, păstrând legăturile exterioare.

Teorema echilibrului părţilor:

Dacă un sistem de corpuri este în echilibru, acţionat fiind de un sistem de forţe efectiv aplicate, orice subsistem din componenţa sa este în echilibru sub acţiunea forţelor aferente corespunzătoare, care pot fi în cazul cel mai general, forţe efectiv aplicate, forţe de legătură interioare sau forţe de legătură exterioare.

APLICAŢII LA CAPITOLELE 2 şi 2.a

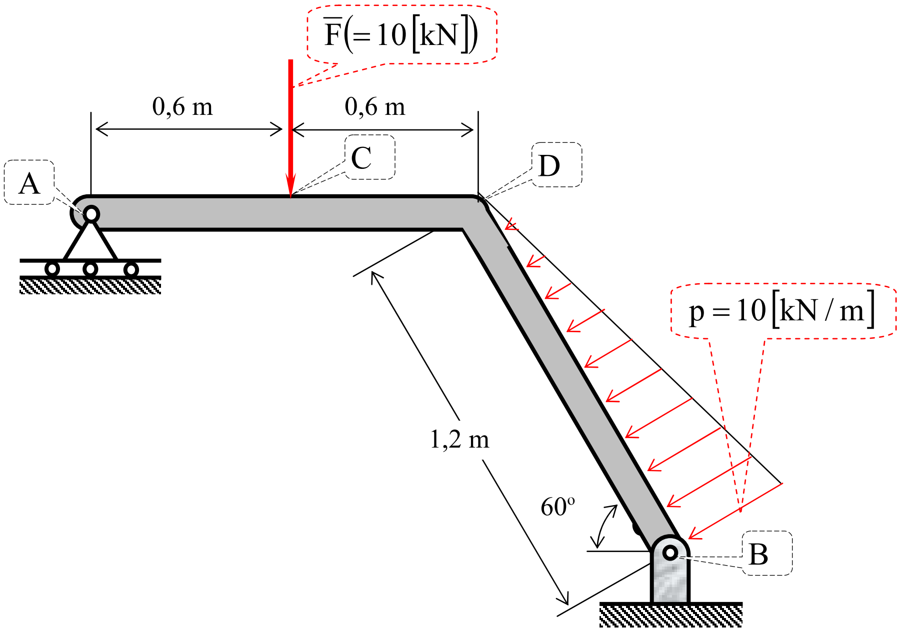


Fig. Apl-2.1

Apl. 2.1

Să se determine reacţiunile din capetele A şi B ale barei cotite ACDB, supusă acţiunii sistemului de forţe din figura Apl-2.1.

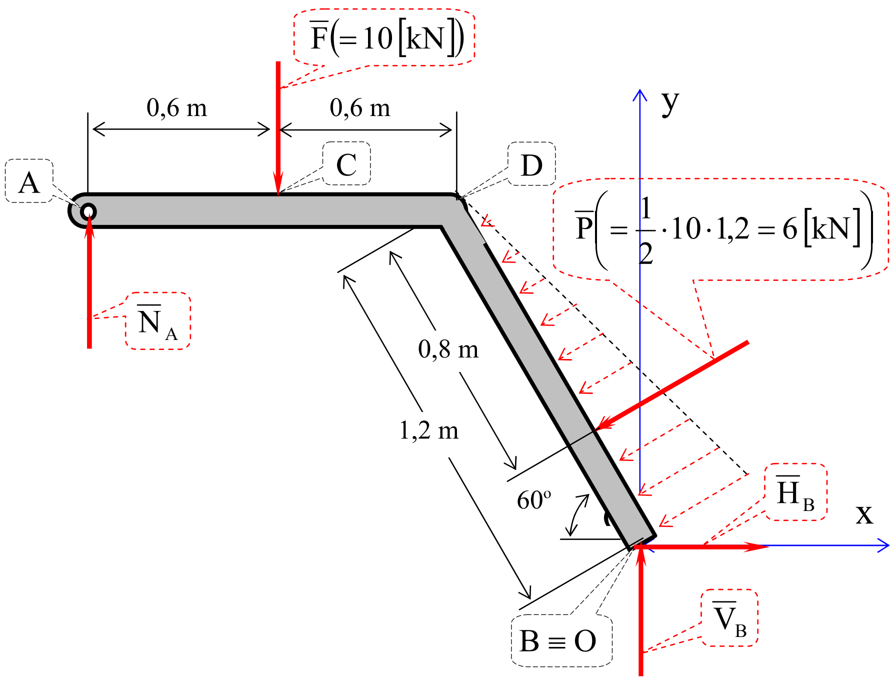


Fig. Apl-2.1.a

Rezolvare:

După eliberarea de legături (reazem simplu în A şi articulaţie cilindrică în B) se obţine un solid rigid liber dar acţionat de forţele efectiv aplicate şi de cele de legătură (fig. Apl-2.1.a).

Ecuaţiile de echilibru, în sistemul de referinţă cartezian cu originea în B, sunt:

$$\begin{cases} H_B - P\cdot\sin 60^o = 0, \\ V_B + N_A - F - P\cdot\cos 60^o = 0, \\ F\cdot\left(0{,}6 + 1{,}2\cdot\cos 60^o\right) + P\cdot 0{,}4 - N_A\cdot\left(1{,}2 + 1{,}2\cdot\cos 60^o\right) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$

$$N_A = \frac{1}{1{,}8}\cdot(F\cdot 1{,}2 + P\cdot 0{,}4) = \frac{1}{1{,}8}\cdot(10\cdot 1{,}2 + 6\cdot 0{,}4) = 8\,[kN]; \quad \blacklozenge$$

$$H_B = P\cdot\sin 60^o = 6\cdot\sin 60^o = 5{,}196\,[kN]; \quad \blacklozenge$$

$$V_B = F + P\cdot\cos 60^o - N_A = 10 + 6\cdot\cos 60^o - 8 = 5\,[kN]. \quad \blacklozenge$$

Apl. 2.2

Bara omogenă AB având masa $m = 100\,[kg]$ este menţinută în poziţia orizontală, indicată în fig. Apl-2.2, prin articulaţia cilindrică din A şi cablul BCD trecut peste un scripete în C. Dacă tensiunea maximă suportată de cablul BCD este $S = 800\,[N]$ (altfel se rupe) să se determine lungimea maximă a_{max}, cu originea de măsurare capătul A, pe care este distribuită sarcina uniformă $p = 2{,}5\,[kN/m]$. Apoi să se determine componentele orizontală şi verticală ale reacţiunii din A la limita de rupere a cablului.

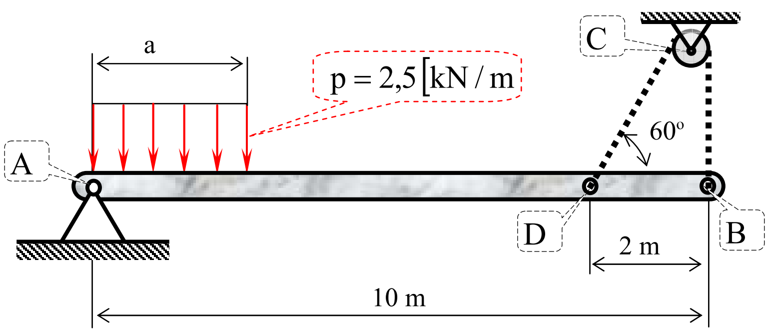


Fig. Apl-2.2

Rezolvare:

După eliberarea de legăturile - articulaţie cilindrică în A şi legături cu fir în B şi D - se obţine un solid rigid liber dar acţionat de forţele efectiv aplicate şi de cele de legătură (fig. Apl-2.2.a).

Forţă efectivă este numai sarcina uniformă $p = 2{,}5\,[kN/m]$ care se

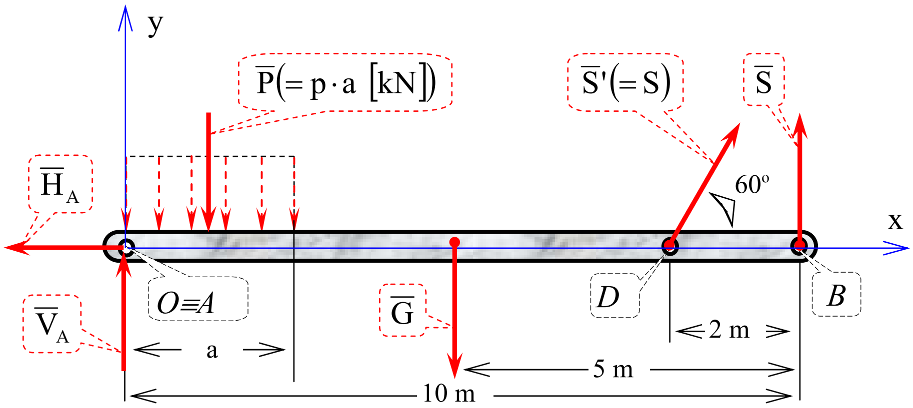


Fig. Apl-2.2.a

înlocuieşte cu rezultanta corespunzătoare, adică:

$$P = p \cdot a = 2{,}5 \cdot a\,[\mathrm{kN}]$$

Ecuaţiile de echilibru, în sistemul de referinţă cartezian sunt:

$$\begin{cases} S \cdot \cos 60^\circ - H_A = 0, \\ V_A + S' \cdot \sin 60^\circ + S - G - P = 0, \\ S' \cdot \sin 60^\circ \cdot 8 + S \cdot 10 - G \cdot 5 - P \cdot \dfrac{a}{2} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Tensiunea maximă suportată de cablul BCD este $S = S' = 800\,[\mathrm{N}]$ astfel că în sistem sunt numai trei necunoscute: H_A, V_A şi a.

Din ecuaţia(1_3), după înlocuirea expresiei forţei P în funcţie de a, se obţine:

$$a = \sqrt{\frac{2}{p} \cdot \left(S' \cdot \sin 60^\circ \cdot 8 + S \cdot 10 - G \cdot 5\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2{,}5} \cdot \left[0{,}8 \cdot \left(\sin 60^\circ \cdot 8 + 10\right) - 0{,}981 \cdot 5\right]};$$

$$\Rightarrow \quad a = 2{,}63\,[\mathrm{m}]; \qquad \blacklozenge$$

$$H_A = S \cdot \cos 60^\circ = 0{,}8 \cdot \cos 60^\circ = 0{,}4\,[\mathrm{kN}] = 400\,[\mathrm{N}]; \qquad \blacklozenge$$

$$V_A = G + P - S \cdot (\sin 60^\circ + 1) =$$
$$= 0{,}981 + 2{,}5 \cdot 2{,}63 - 0{,}8 \cdot (\sin 60^\circ + 1) = 6{,}063\,[\mathrm{kN}].$$ ♦

Apl. 2.3

Să se determine componentele forţelor de legătură din încastrarea

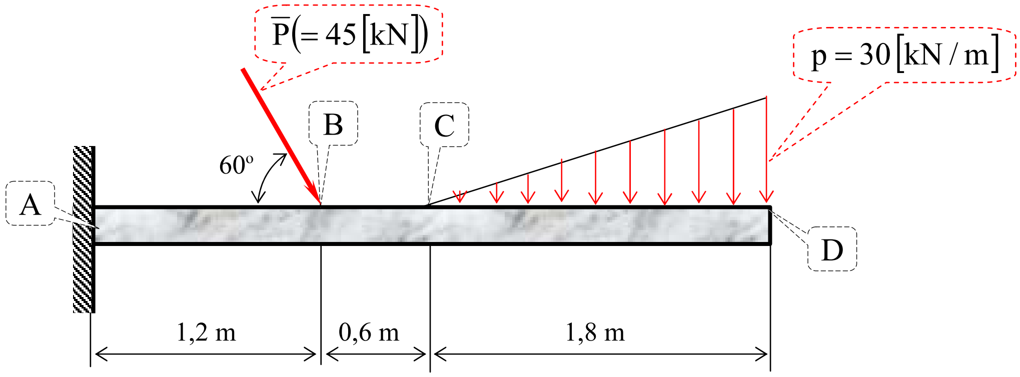


Fig. Apl-2.3

A, pentru bara AD supusă acţiunii sistemului de forţe din figura Apl-2.3.

Rezolvare:

După eliberarea de legătura încastrare plană se obţine un solid rigid liber

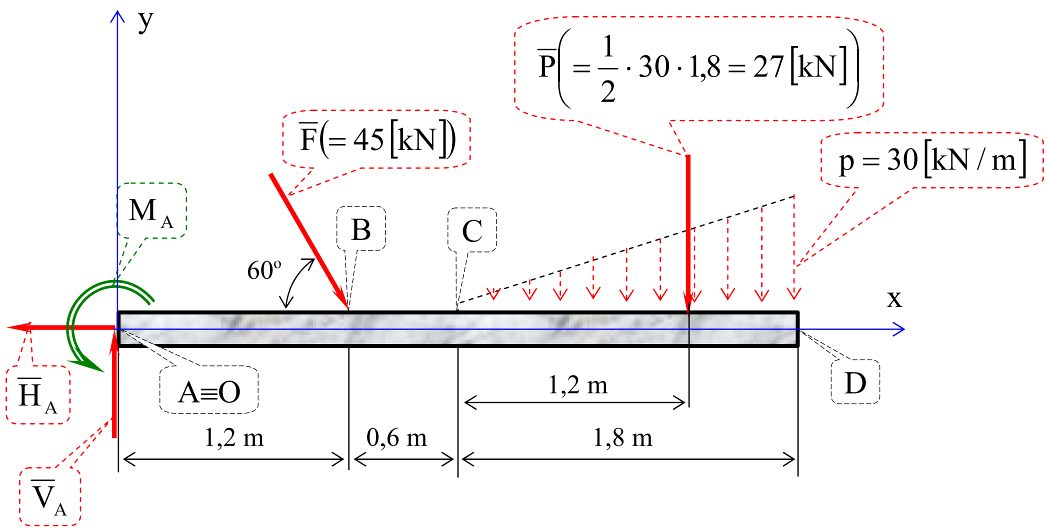


Fig. Apl-2.3.a

dar acţionat de forţele efectiv aplicate şi de cele de legătură (fig. Apl-2.3.a).

Ecuaţiile de echilibru, în sistemul de referinţă cartezian cu originea în A, sunt:

$$\begin{cases} F\cdot\cos 60^\circ - H_A = 0, \\ V_A - F\cdot\sin 60^\circ - P = 0, \\ M_A - F\cdot\sin 60^\circ\cdot 1{,}2 - P\cdot 3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad H_A = F\cdot\cos 60^\circ = 45\cdot\cos 60^\circ = \mathbf{22{,}5}\,[\mathbf{kN}]; \quad \blacklozenge$$

$$V_A = F\cdot\sin 60^\circ + P = 45\cdot\sin 60^\circ + 27 = \mathbf{65{,}97}\,[\mathrm{kN}]; \quad \blacklozenge$$

$$M_A = F\cdot\sin 60^\circ\cdot 1{,}2 + P\cdot 3 = 45\cdot\sin 60^\circ\cdot 1{,}2 + 27\cdot 3 = \mathbf{127{,}77}\,[\mathbf{kN}]. \quad \blacklozenge$$

Apl. 2.4

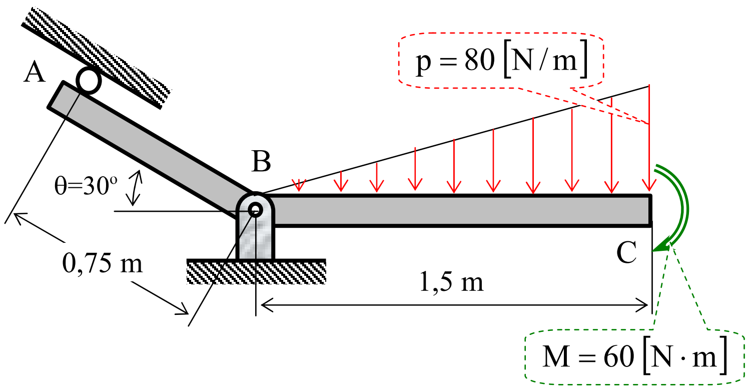


Fig. Apl-2.4

Bara ABC articulată cilindric în B şi rezemată prin rola A pe suprafaţa înclinată cu 30° faţă de orizontală (fig. Apl-2.4), este supusă acţiunii forţei distribuite liniar $p = 80\,[N/m]$ şi unui moment $M = 60\,[N\cdot m]$. Să se determine mărimea reacţiunii din B.

Răspuns:
$R_B = 214{,}07\,[N]$.

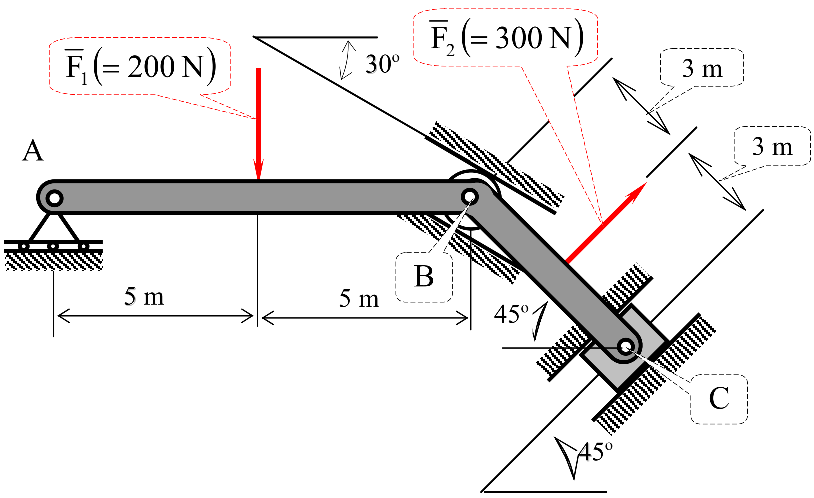


Fig. Apl-2.5

Apl. 2.5

Să se determine reacţiunile din punctele A, B şi C, pentru bara cotită ABC, rezemată în cele trei puncte (fig. Apl-2.5), dacă se neglijează frecările în toate punctele de rezemare.

Răspuns: $N_A = 190\,[N];\ \ N_B = 303{,}26\,[N];\ \ N_C = 85{,}56\,[N].$

Apl. 2.6

Să se determine forţele de legătură exterioare din punctele A şi F, pentru sistemul de bare sudate între ele, din figura Apl-2.6. Sistemul de forţe efective este constituit din sarcina distribuită uniform $p = 150\ [N/m]$.

Se neglijează greutăţile proprii ale barelor.

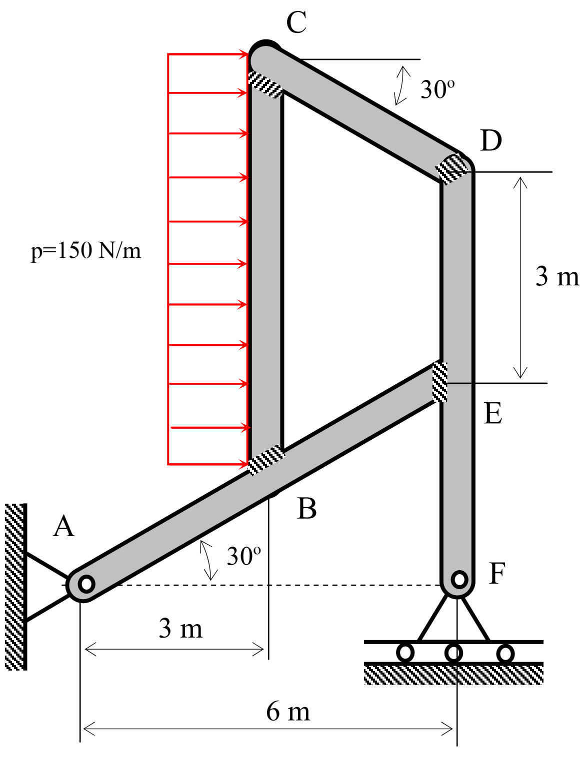


Fig. Apl-2.6

Răspuns:

$R_A = 1258{,}44\ [N];$

$N_F = 802{,}2\ [N].$

Apl. 2.7

Să se determine forţele de legătură exterioare (reacţiunile) din încastrare, pentru bara cotită din figura Apl-2.7. Sistemul de forţe efective este constituit din sarcina distribuită uniform $p = 150\ [N/m]$ şi trei sarcini concentrate (două verticale şi una orizontală). Se neglijează greutatea proprie barei.

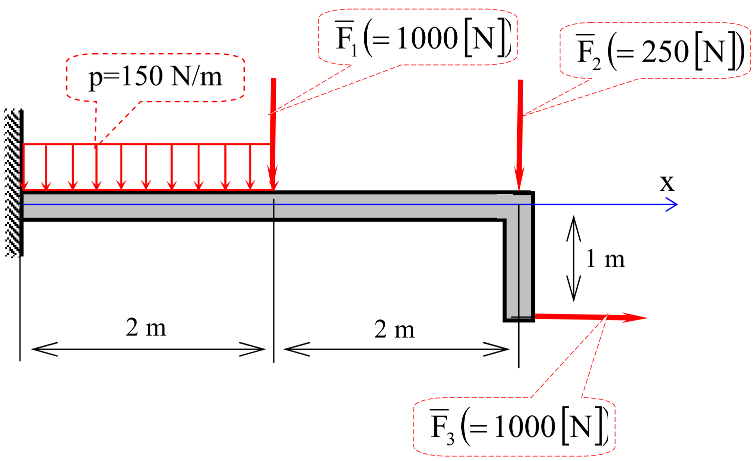


Fig. Apl-2.7

Răspuns: $R_x^{î} = 1000\ [N];\ R_y^{î} = 1550\ [N];\ \ M_z^{î} = 2300\ [N \cdot m].$

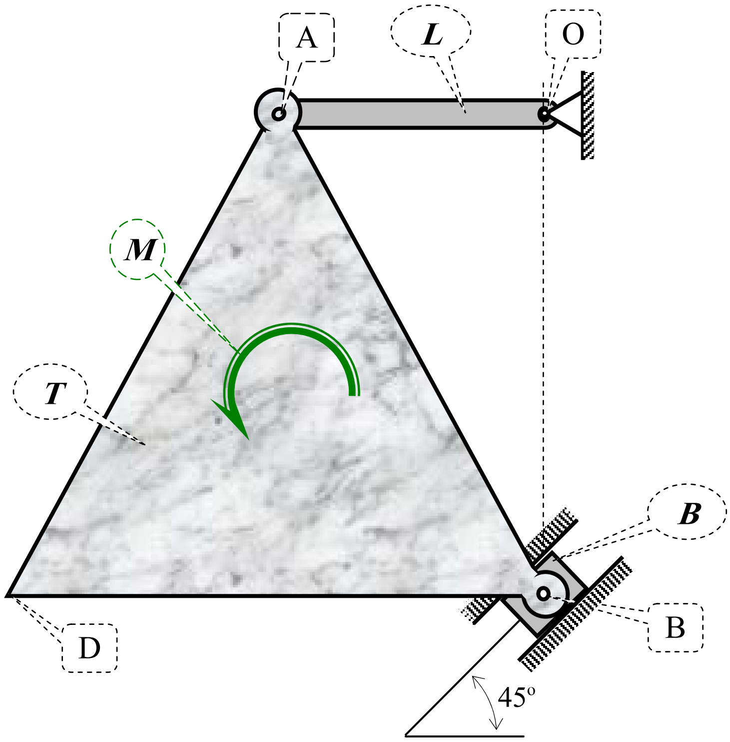


Fig. Apl-2.8

Apl. 2.8

În figura Apl-2.8, placa omogenă (triunghi echilateral având laturile egale cu 0,3m) are masa $m = 80\,[\mathrm{kg}]$ şi este susţinută de către bara AO şi de piatra de culisă (reazem simplu fără frecare) în punctul B. Să se determine mărimea momentului ***M***, dacă placa este în echilibru în poziţia indicată în figură, sub acţiunea acestui moment şi a greutăţii proprii.

Răspuns: $M = 86{,}177\,[\mathrm{N \cdot m}]$.

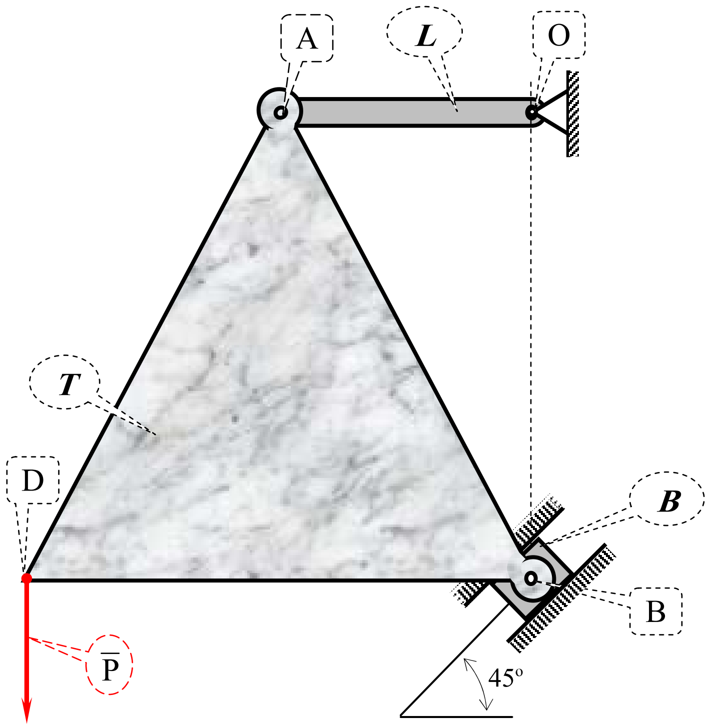


Fig. Apl-2.9

Apl. 2.9

În problema ***Apl. 2.8*** se înlocuieşte momen-tul M cu o forţă verticală P aplicată în punctul D (fig. Apl-2.9). Să se determine mărimea forţei P, dacă placa este menţinută în echilibru sub acţiunea greutăţii proprii şi a acestei forţe.

Răspuns:

$P = 2144{,}11\,[\mathrm{N}]$.

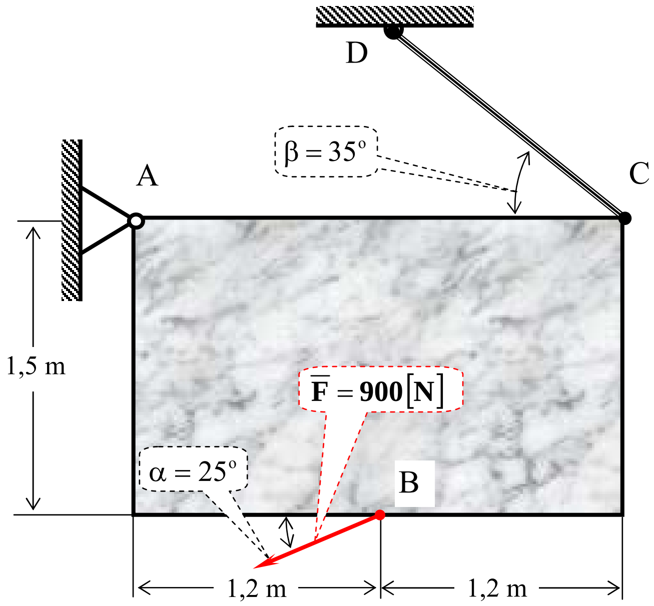


Fig. Apl-2.10

Apl. 2.10

Să se determine forţa cu care bolţul articulaţiei cilindrice din A acţionează asupra plăcii dreptunghiulare de greutate neglijabilă (fig. Apl-2.10), dacă în C placa este suspendată la plafon în D printr-un fir.

Răspuns:
$R_A = 1843\,[N]$.

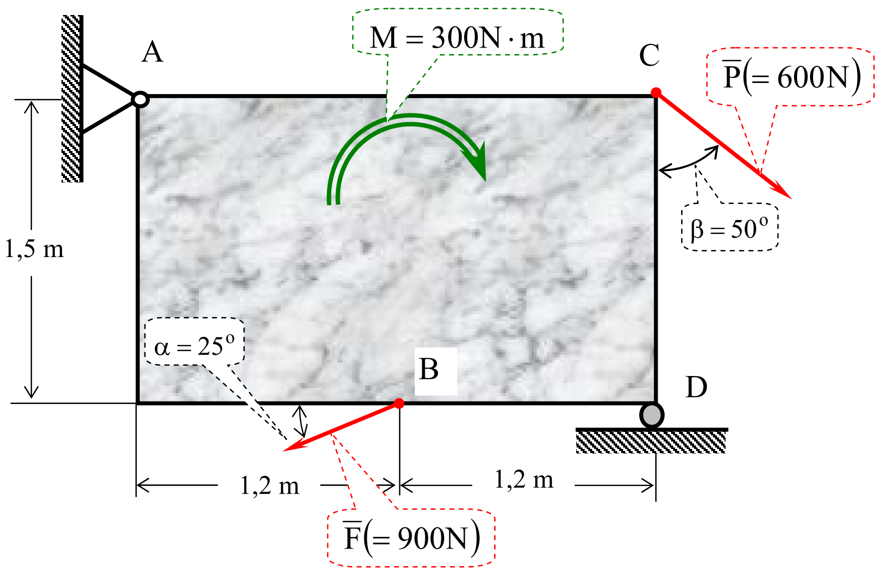


Fig. Apl-2.11

Apl. 2.11

Repetarea întrebării din problema precedentă- **Apl. 2.10**, dacă asupra plăcii acţionează un cuplu $M = 300\,[N \cdot m]$ ca în fig. Apl-2.11 şi dacă cablul este înlocuit de către o forţă efectiv aplicată $P = 600\,[N]$. De asemenea, placa în acest caz se sprijină pe o rolă în D ca în figură.

Răspuns: $R_A = 569{,}6\,[N]$.

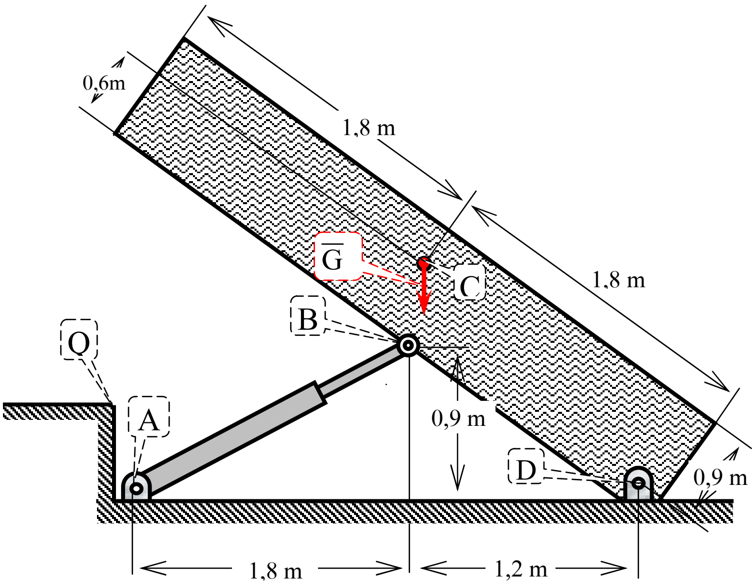


Fig. Apl-2.12

Apl. 2.12

Un mecanism de amortizare (menţinere) este reprezentat în figura Apl-2.12. Greutatea cuvei împreună cu a conţinutului său este $G = 5.500\,[N]$. Cuva este în echilibru în poziţia indicată în figură, centrul de greutate fiind în punctul C. Să se determine mărimea forţei S_{AB} din tija AB a sistemului care constă din cilindrul hidraulic cu tija corespunzătoare, pentru menţinerea şi coborârea cuvei.

Răspuns: $S_{AB} = 4427{,}41\,[N]$.

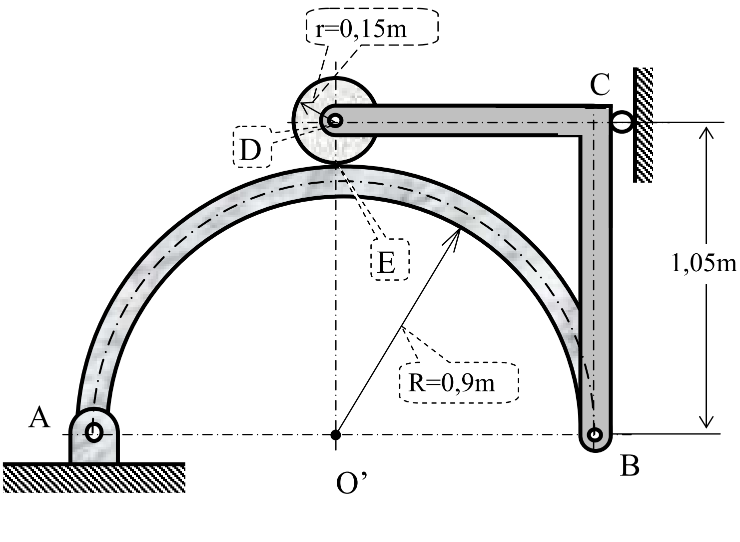


Fig. Apl-2.13

Apl. 2.13

Discul neted (se neglijează frecarea) din figura Apl-2.13 este articulat cilindric în D şi are greutatea $G = 90[N]$. Dacă se neglijează greutăţile barelor să se determine reacţiunile din B şi D.

Rezolvare:

Metoda I^a. Se utilizează *teorema echilibrului părţilor* aplicată fiecărui corp din componenţa sistemului.

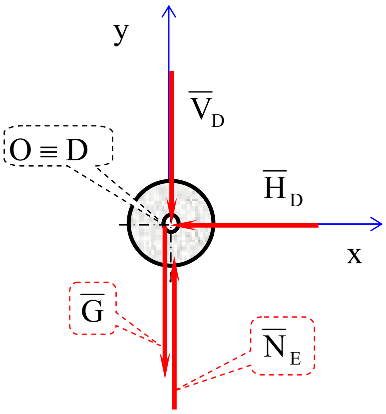


Fig. Apl-2.13.a

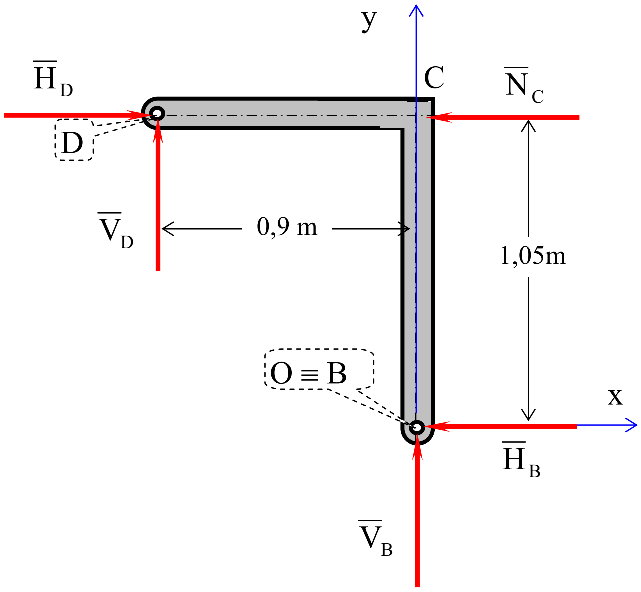


Fig. Apl-2.13.b

Ecuaţiile de echilibru pentru discul de greutate $G = 90[N]$ (fig. Apl-2.13.a) eliberat de legături (*teorema echilibrului părţilor*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în O≡D situat în centrul discului, sunt:

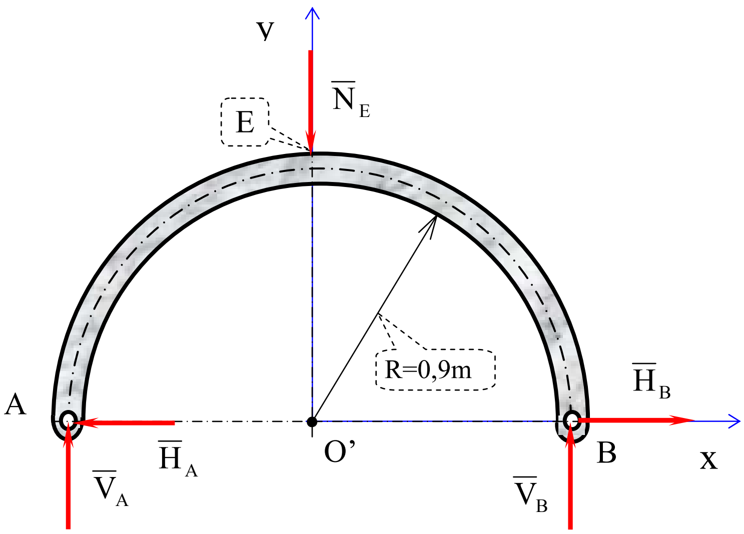


Fig. Apl-2.13.c

$$\begin{cases} -H_D = 0, \\ N_E - V_D - G = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru bara cotită BCD (fig. Apl-2.13.b) de greutate neglijabilă, eliberată de legături (*teorema echilibrului părţilor*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în $B \equiv O$, sunt:

$$\begin{cases} H_D - N_C - H_B = 0, \\ V_B + V_D = 0, \\ N_C \cdot 1{,}05 - V_D \cdot 0{,}9 - H_D \cdot 1{,}05 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru bara semicirculară AEB (fig. Apl-2.13.c) de greutate neglijabilă, eliberată de legături (*teorema echilibrului părţilor*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în O≡O', sunt:

$$\begin{cases} H_B - H_A = 0, \\ V_A - V_B - N_E = 0, \\ -V_B \cdot 0{,}9 - V_A \cdot 0{,}9 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Rezolvând sistemul de 8 ecuaţii liniare constituit din grupurile de ecuaţii (1), (2) şi (3) obţinem:

din ec. (1_1)

$$\Rightarrow \quad H_D = 0; \qquad (1_1')$$

din ec. (3_1)

$$\Rightarrow \quad H_A = H_B; \qquad (3_1')$$

din ec. (3_3)

$$\Rightarrow \quad V_A = -V_B; \qquad (3_3')$$

din ec. (2_2)

$$\Rightarrow \quad V_B = -V_D; \qquad (2_2')$$

din ec. (2_1)

$$\Rightarrow \quad N_C = -H_B; \qquad (2_1')$$

din ec. (3_2) şi $(3_3')$

$$\Rightarrow \quad N_E = V_A - V_B = 2 \cdot V_A = -2 \cdot V_B; \qquad (3_2')$$

din ec. (1_2)

$$\Rightarrow \quad N_E = G + V_D; \qquad (1_2')$$

din rel. $(3_2')$, $(1_2')$ şi $(2_2')$

$$\Rightarrow \quad G - V_B = -2 \cdot V_B \quad \text{şi} \Rightarrow \quad V_B = -V_D = -G = -90\,[N]; \; \blacklozenge$$

din ec. (2_3)

$$\Rightarrow \quad N_C = \frac{0,9}{1,05} \cdot V_D = \frac{0,9}{1,05} \cdot 90 = 77,143\,[N]; \qquad (2_3') \; \blacklozenge$$

din rel. $(3_1')$, $(2_1')$ şi $(2_3')$

$$\Rightarrow \quad H_A = H_B = -N_C = -77,143\,[N]; \qquad (2_3') \; \blacklozenge$$

din rel. $(3_2')$

$$\Rightarrow \quad N_E = 2 \cdot V_A = 2 \cdot 90 = 180\,[N]. \; \blacklozenge$$

Rezolvarea sistemului constituit din grupurile (1), (2) şi (3), având 8 ecuaţii şi 8 necunoscute, cu ajutorul procedurilor din MATHCAD. În tabel sunt introduşi coeficienţii necunoscutelor sistemului şi termenii liberi.

Nec. → *Nr. ec.* ↓	H_D	V_D	N_E	H_B	V_B	N_C	H_A	V_A	*Term. liber*
1_1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
1_2	0	-1	1	0	0	0	0	0	90
2_1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0
2_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0
2_3	-1,05	-0,9	0	0	0	1,05	0	0	0
3_1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0
3_2	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0
3_3	0	0	0	0	-0,9	0	0	-0,9	0

Enter a non-singular matrix corresponding to the n equations in n unknowns:

Enter a vector of n constants:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0 & -0.9 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 90N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soln := lsolve(M,v)

Solution: $$soln = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \\ 180 \\ -77.14286 \\ -90 \\ 77.14286 \\ -77.14286 \\ 90 \end{pmatrix} N$$

Deci rezultatele obţinute pe cele două căi sunt identice.

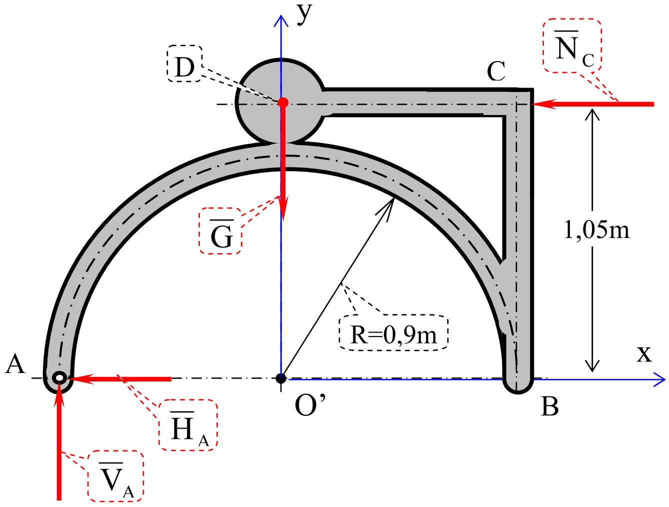


Fig. Apl-2.13.d

Metoda II^a .

Se utilizează *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.13.d) la care se adaugă *teorema echilibrului părţilor* pentru subsistemul constituit din disc şi tija BCD (fig. Apl-2.13.e).

Ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de corpuri solidificat (fig. Apl-2.13.d), în sistemul de

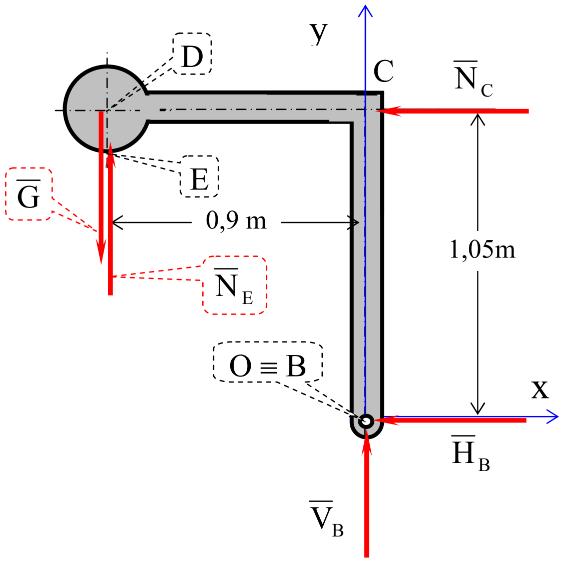


Fig. Apl-2.13.e

referinţă cartezian cu originea în O', sunt:

$$\begin{cases} -H_A - N_C = 0, \\ V_A - G = 0, \\ N_C \cdot 1{,}05 - V_A \cdot 0{,}9 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul solidificat, constituit din bara cotită BCD de greutate neglijabilă şi discul de greutate $G = 90[N]$ (*teorema echilibrului părţilor + teorema solidificării*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în B ≡ O (fig. Apl-2.13.e), sunt:

$$\begin{cases} H_B + N_C = 0, \\ N_E - G - V_B = 0, \\ N_C \cdot 1{,}05 + G \cdot 0{,}9 - N_E \cdot 0{,}9 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Rezolvând sistemul de 6 ecuaţii liniare constituit din grupurile de ecuaţii (4) şi (5) obţinem:

din ec. (4_1) şi (5_1)

$$\Rightarrow \quad H_A = H_B = -N_C; \qquad (4_1')$$

din ec. (4_2)

$$\Rightarrow \quad V_A = G = 90\,[N]; \qquad (4_2') \blacklozenge$$

din ec. (4_3) şi $(4_2')$

$$\Rightarrow \quad N_C = \frac{0{,}9}{1{,}05} \cdot V_A = \frac{0{,}9}{1{,}05} \cdot 90 = 77{,}143\,[N]; \qquad (4_3') \blacklozenge$$

din ec. $(4_1')$ şi $(4_3')$

$$\Rightarrow \quad H_A = H_B = -77{,}143\,[N]; \qquad (4_1')$$

din ec. (5_2) şi (5_3)

$$\Rightarrow \quad G + V_B = G + N_C \cdot \frac{1,05}{0,9} \quad \text{şi} \quad V_B = 90\,[N]; \qquad (5_2\text{'}) \quad \blacklozenge$$

din ec. (5_2) şi (5_2')

$$\Rightarrow \quad N_E = G + V_B = 90 + 90 = 180\,[N]. \quad \blacklozenge$$

Apoi din figura (fig. Apl-2.13.a) se determină componentele reacţiunilor din articulaţia cilindrică D, astfel că:

$$\Rightarrow \quad H_D = 0, \quad V_D = N_E - G = 180 - 90 = 90\,[N]. \quad \blacklozenge$$

Deci reacţiunile din articulaţiile cilindrice B şi D rezultă prin aplicarea regulii paralelogramului, adică:

$$R_B = \sqrt{(H_B)^2 + (V_B)^2} = \sqrt{(77,143)^2 + (90)^2} = 118,537\,[N] \quad \blacklozenge$$

şi $$R_D = \sqrt{(H_D)^2 + (V_D)^2} = \sqrt{(0)^2 + (90)^2} = 90\,[N]. \quad \blacklozenge$$

Apl. 2.14

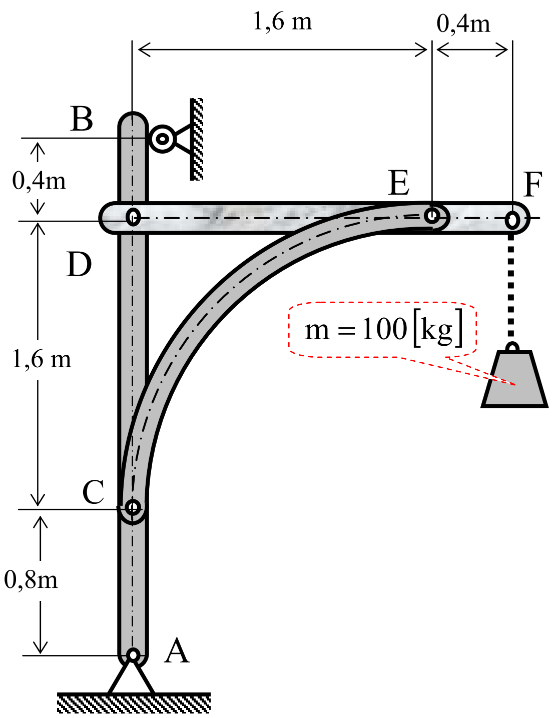
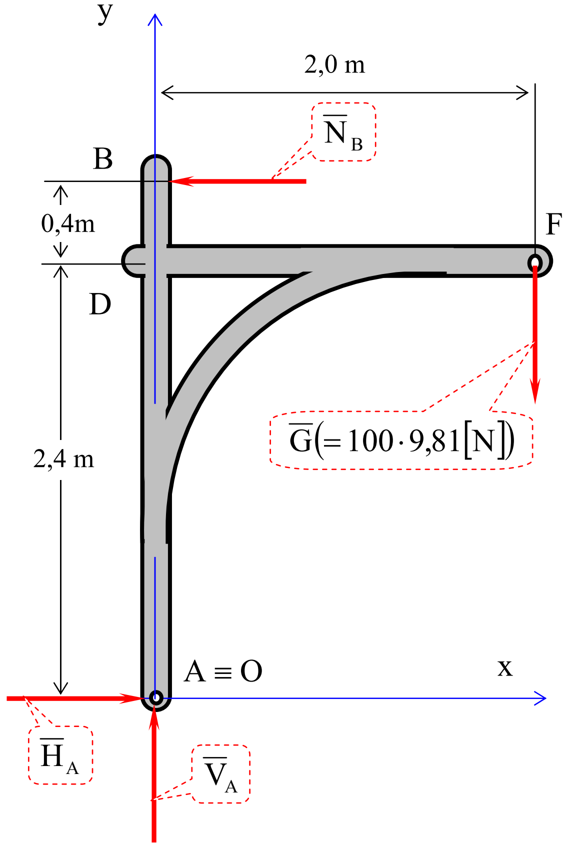


Fig. Apl-2.14

Să se determine componentele orizontală şi verticală ale forţei cu care ştiftul din articulaţia cilindrică din D (legătură interioară) acţionează asupra barei ACDB şi ale reacţiunii din A pentru sistemul de corpuri reprezentat în figura Apl-2.14, supus acţiunii unei sarcini de masă $m = 100\,[kg]$ aplicată în punctul F. Se neglijează greutăţile barelor sistemului.

Rezolvare:

Se utilizează *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.14.a) la care se adaugă *teorema echilibrului părţilor* pentru bara curbă CE (fig. Apl-2.14.b), respectiv bara dreaptă DEF (fig. Apl-2.14.c).



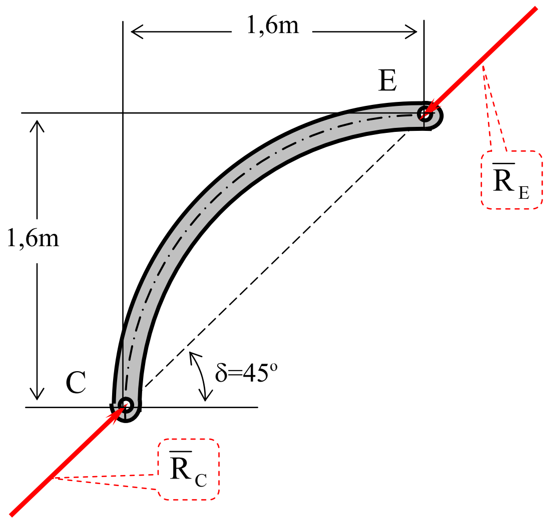


Fig. Apl-2.14.b

Fig. Apl-2.14.a

Ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de corpuri solidificat (fig. Apl-2.14.a), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în O ≡ A, sunt:

$$\begin{cases} H_A - N_B = 0, \\ V_A - G = 0, \\ N_B \cdot 2{,}8 - G \cdot 2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_B = \dfrac{G\cdot 2}{2{,}8} = \dfrac{100\cdot 9{,}81\cdot 2}{2{,}8} = 700{,}71 \ \ [N]; \\ H_A = N_B = 700{,}71 \ \ [N]; \\ V_A = G = 981 \ \ [N]. \end{cases}$$

Din figura (fig. Apl-2.14.b) se stabileşte direcţia reacţiunii R_E din articulaţia cilindrică E, care apoi se utilizează în figura (fig. Apl- 2.14.c).

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul constituit numai din bara DEF de greutate neglijabilă (*teorema echilibrului părţilor*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în $D \equiv O$(fig. Apl- 2.14.c), sunt:

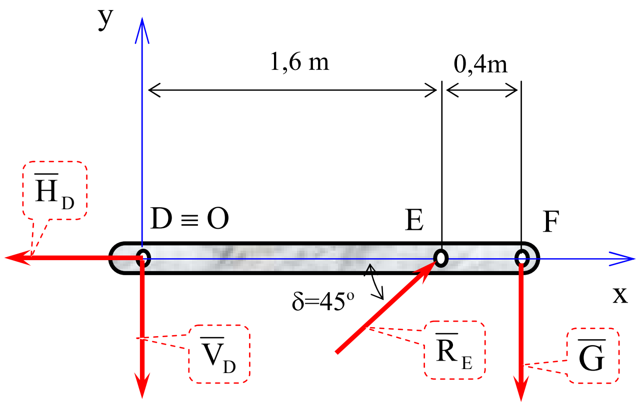


Fig. Apl-2.14.c

$$\begin{cases} R_E \cdot \cos 45^o - H_D = 0, \\ R_E \cdot \sin 45^o - V_D - G = 0, \\ R_E \cdot \sin 45^o \cdot 1{,}6 - G \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

(2)

Rezolvând sistemul de 3 ecuaţii liniare (2) obţinem:

$$\Rightarrow R_E = \frac{G \cdot 2}{\sin 45^o \cdot 1{,}6} = \frac{\mathbf{981 \cdot 2}}{\sin 45^o \cdot 1{,}6} = \mathbf{1734{,}18}[\mathrm{N}];$$

$$\Rightarrow \quad H_D = R_E \cdot \cos 45^o = 1734{,}18 \cdot \cos 45^o = 1226{,}25[\mathrm{N}]; \quad \blacklozenge$$

$$\Rightarrow \quad V_D = R_E \cdot \sin 45^o - G = 1226{,}25 - 981 = 245{,}25[\mathrm{N}]. \quad \blacklozenge$$

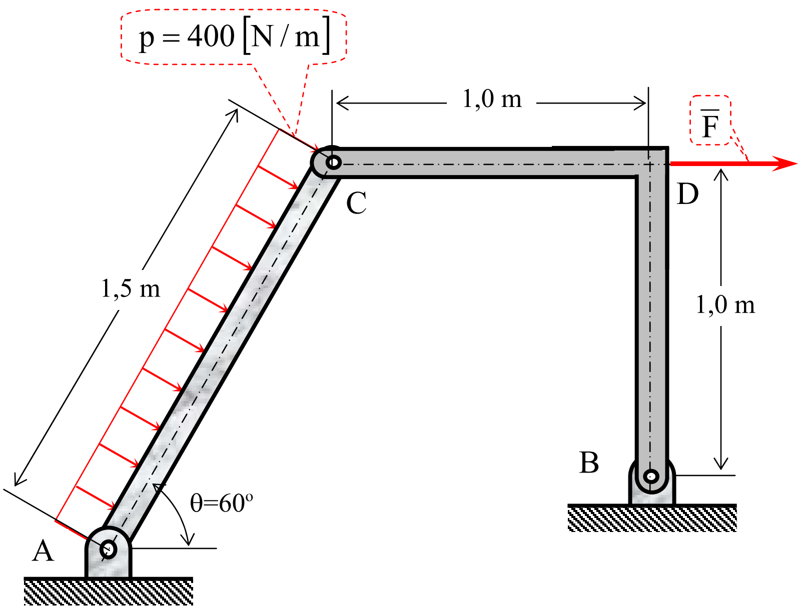


Fig. Apl-2.15

Apl. 2.15

Încărcarea pentru sistemul de corpuri din figura Apl-2.15 este realizată printr-o forţă distibuită pe bara dreaptă AC de intensitate $p = 400[N/m]$ şi o forţă concentrată F orizontală aplicată în punctul D.

Pentru $F = 0$ să se determine mărimile componentelor orizontale şi verticale ale reacţiunilor din A şi B.

Rezolvare:

Se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara AC (fig. Apl-2.15.a) având-se în vedere că între punctele C şi B este o legătură cu tijă rigidă încărcată numai prin forţele de legătură din articulaţiile cilindrice B (forţă de legătură exterioară) respectiv C (forţă de legătură interioară) astfel că direcţiile acestora sunt cunoscute – direcţia dreptei CB şi mărimile necunoscute.

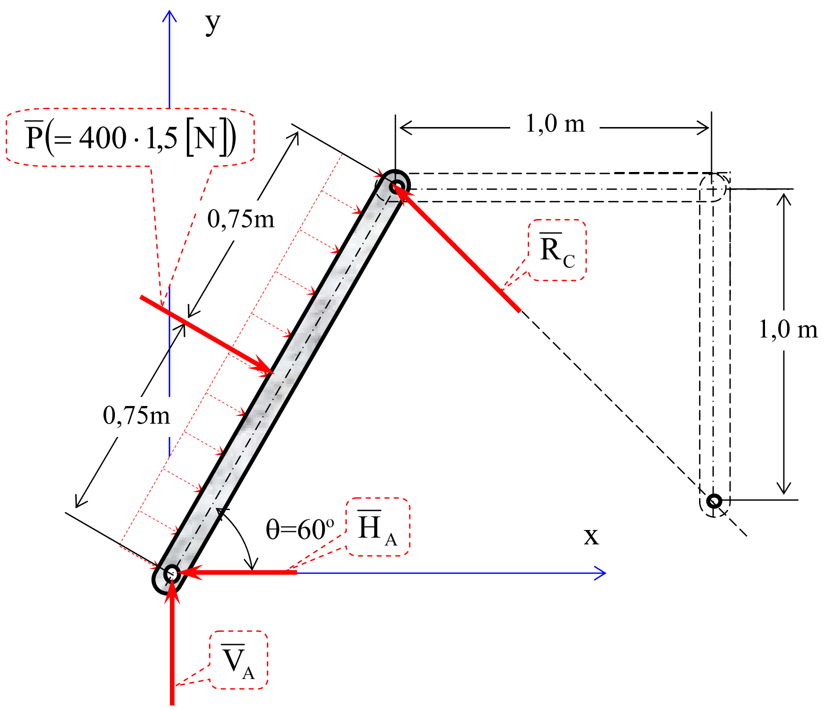


Fig. Apl-2.15.a

Înainte de scrierea ecuaţiilor de echilibru se înlocuieşte forţa distribuită în lungul barei AC - $p = 400\left[N/m\right]$ cu forţa echivalentă - $P = p\cdot 1{,}5 = 400\left[N/m\right]\cdot 1{,}5\left[m\right] = 600\left[N\right]$ aplicată la jumătatea distanţei dintre A şi C.

Ecuaţiile de echilibru pentru bara AC, în sistemul de referinţă cartezian cu originea în A, sunt:

$$\begin{cases} -H_A - R_C\cdot\cos 45^{\circ} + P\cdot\cos 30^{\circ} = 0, \\ V_A + R_C\cdot\sin 45^{\circ} - P\cdot\sin 30^{\circ} = 0, \\ R_C\cdot\sin 75^{\circ}\cdot 1{,}5 - P\cdot 0{,}75 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Rezolvând sistemul de trei ecuaţii liniare (1) obţinem:

- din ec. (1_3)

$$\Rightarrow \quad R_C = \frac{P\cdot 0{,}75}{1{,}5\cdot\sin 75^{\circ}} = \frac{600\cdot 0{,}75}{1{,}5\cdot\sin 75^{\circ}} = 310{,}583\left[N\right]; \qquad (1_3{'})$$

- din ec. (1_1)

$$H_A = P \cdot \cos 30^o - R_C \cdot \cos 45^o = \\ = 600 \cdot \cos 30^o - 310{,}583 \cdot \cos 45^o = \mathbf{300}\,[N]; \qquad (1_1’)$$

- din ec. (1_2)

$$V_A = P \cdot \sin 30^o - R_C \cdot \sin 45^o = \\ = 600 \cdot \sin 30^o - 310{,}583 \cdot \sin 45^o = \mathbf{80{,}385}\,[N]. \qquad (1_2’)$$

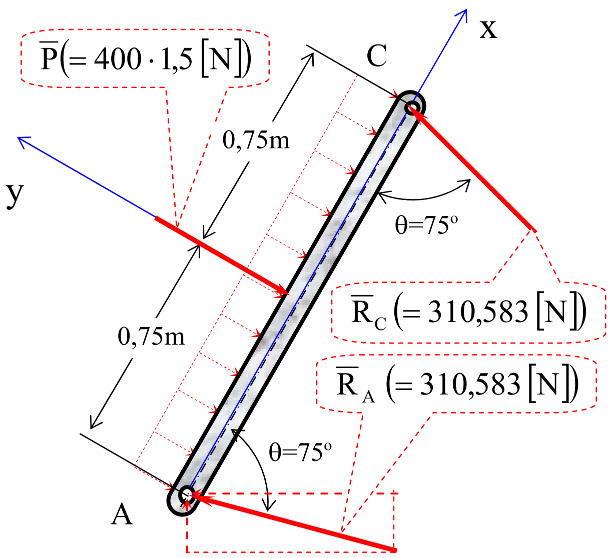


Fig. Apl-2.15.b

Deci, reacţiunea din articulaţia cilindrică C (legătură interioară) este deja determinată rel. $(1_3’)$ astfel că este determinată şi cea din articulaţia cilindrică B (legătură exterioară):

$$R_B = R_C = 310{,}583\,[N], \blacklozenge$$

iar cea din A rezultă prin aplicarea regulii paralelogramului, adică:

$$R_A = \sqrt{(H_A)^2 + (V_A)^2} = \sqrt{(300)^2 + (80{,}385)^2} = 310{,}583\,[N]. \qquad \blacklozenge$$

Verificarea rezultatului (vezi fig. Apl-2.15.b):

$$\begin{cases} R_C \cdot \cos 75^o - R_A \cdot \cos 75^o = 0, \\ P - R_C \cdot \sin 75^o - R_A \cdot \sin 75^o = 0, \\ R_C \cdot \sin 75^o \cdot 0{,}75 - R_A \cdot \sin 75^o \cdot 0{,}75 = 0. \end{cases}$$

apoi prin înlocuirea valorilor determinate mai sus, se obţine:

$$\begin{cases} 310{,}583 \cdot \cos 75^o - 310{,}583 \cdot \cos 75^o = 0, \\ 600 - 310{,}583 \cdot \sin 75^o - 310{,}583 \cdot \sin 75^o = 0, \\ 310{,}583 \cdot \sin 75^o \cdot 0{,}75 - 310{,}583 \cdot \sin 75^o \cdot 0{,}75 = 0. \end{cases}$$

Apl. 2.16

Încărcarea pentru sistemul de corpuri din figura Apl-2.15 din problema ***Apl. 2.15***, este realizată printr-o forţă distibuită pe bara dreaptă AC de intensitate $p = 400[N/m]$ şi o forţă concentrată $F = 500[N]$ orizontală aplicată

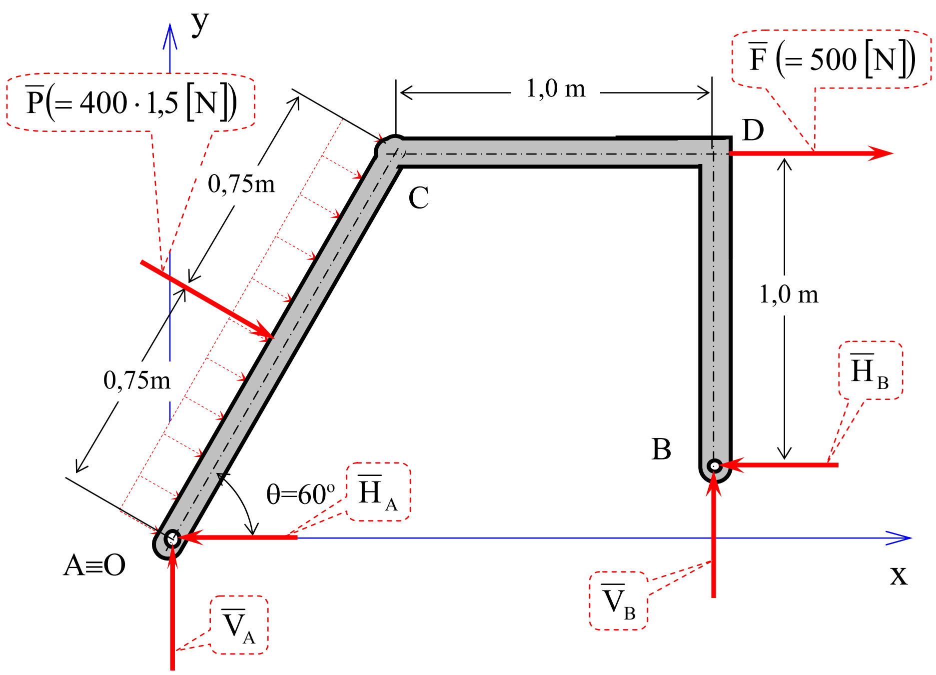


Fig. Apl-2.16.a

în punctul D (fig. Apl-2.16.a). Să se determine mărimile componentelor orizontale şi verticale ale reacţiunilor din A şi B.

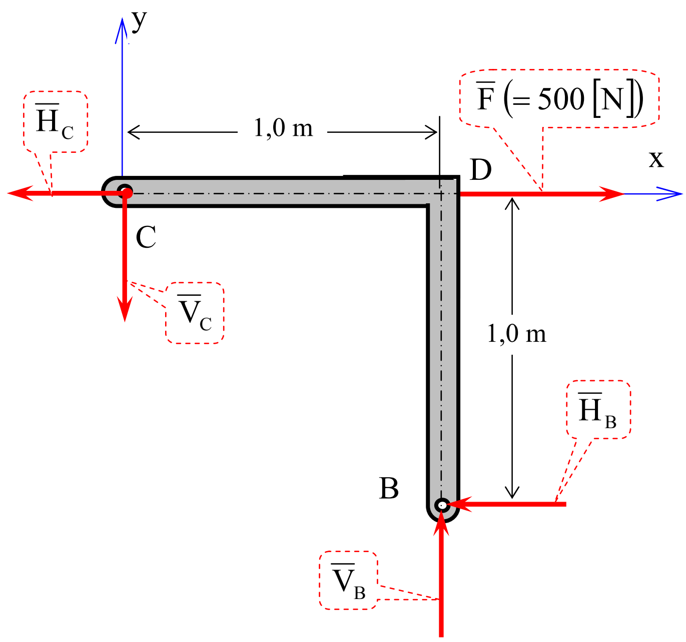


Fig. Apl-2.16.b

Rezolvare:

Se utilizează *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.16.a) la care se adaugă *teorema echilibrului părţilor* pentru bara cotită BDC (fig. Apl-2.16.b).

Ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de corpuri solidificat (fig. Apl-2.16.a), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în $O \equiv A$, sunt:

$$\begin{cases} -H_A - H_B + F + P \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ V_A + V_B - P \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ H_B \cdot (1{,}3 - 1) + V_B \cdot (1 + 0{,}75) - F \cdot 1{,}3 - P \cdot 0{,}75 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul constituit numai din bara cotită BDC (fig. Apl-2.16.b) de greutate neglijabilă (*teorema echilibrului părţilor*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în $C \equiv O$, sunt:

$$\begin{cases} -H_B - H_C + F = 0, \\ -V_B - V_C = 0, \\ V_B \cdot 1 - H_B \cdot 1 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul de 6 ecuaţii liniare constituit din grupurile de ecuaţii (1) şi (2) obţinem:

din ec. (2_3)

$$\Rightarrow V_B = H_B; \qquad (2_3')$$

din ec. (2_2) cu (2_3')

$$\Rightarrow V_C = V_B = H_B; \qquad (2_2')$$

din ec. (1_3) cu (2_3')

$$\Rightarrow V_B = H_B = \frac{1}{2{,}05} \cdot (F \cdot 1{,}3 + P \cdot 0{,}75) =$$

$$= \frac{1}{2{,}05} \cdot (500 \cdot 1{,}3 + 600 \cdot 0{,}75) = 536{,}585\,[N];$$

din ec. (1_2)

$$\Rightarrow V_A = P \cdot \sin 30^\circ - V_B =$$

$$= 600 \cdot \sin 30^\circ - 536{,}585 = -236{,}585\,[N];$$

din ec. (1_1)

$$\Rightarrow H_A = F + P\cdot\cos 30^\circ - H_B =$$

$$= 500 + 600\cdot\cos 30^\circ - 536{,}585 = 483{,}032\,[\mathrm{N}].$$

Deci, reacţiunile din articulaţiile cilindrice A şi B rezultă prin aplicarea regulii paralelogramului, adică:

$$R_A = \sqrt{(H_A)^2 + (V_A)^2} = \quad \blacklozenge$$

$$= \sqrt{(483{,}032)^2 + (236{,}585)^2} = 537{,}86\ [\mathrm{N}];$$

şi

$$R_B = \sqrt{(H_B)^2 + (V_B)^2} = \quad \blacklozenge$$

$$= \sqrt{(536{,}585)^2 + (536{,}585)^2} = 758{,}85\ [\mathrm{N}].$$

Apl. 2.17

Structura reprezentată în figura Apl-2.17 este compusă din două bare de

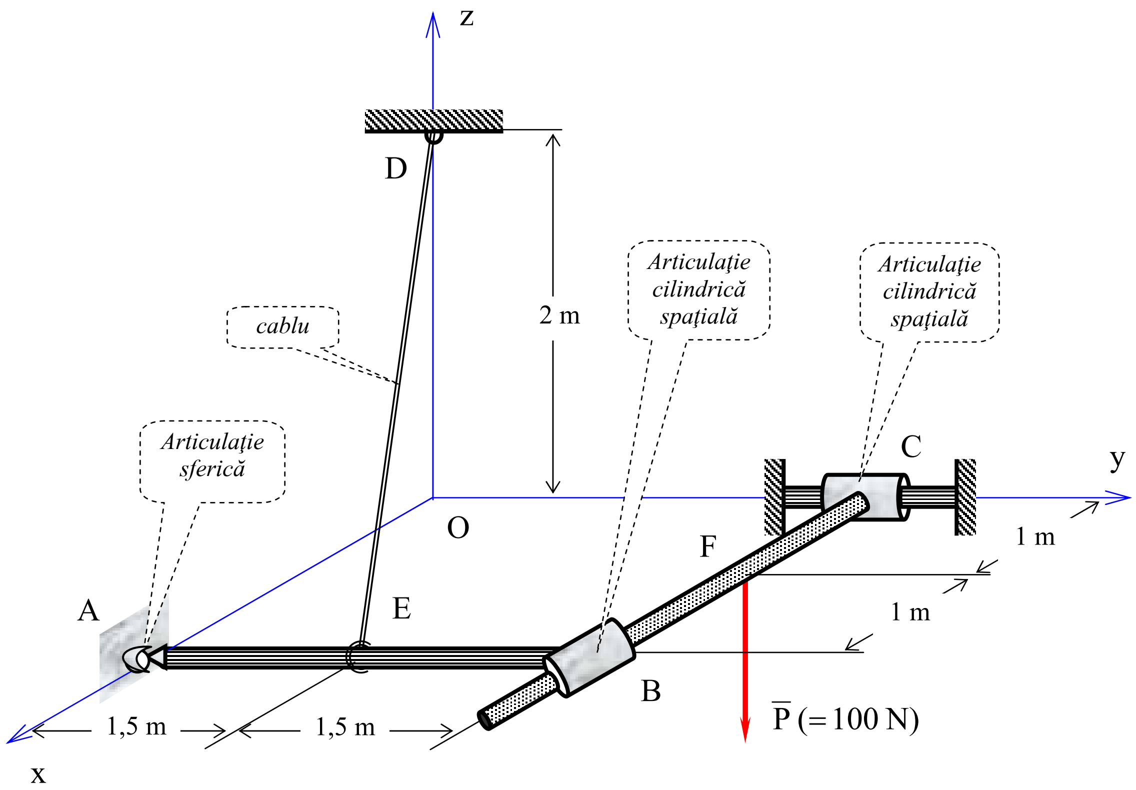


Fig. Apl-2.17

greutăţi neglijabile şi un cablu ED. Să se determine tensiunea din cablu, reacţiunile exterioare din A şi C, şi forţele de legătură interioare din punctul B, dacă structura este supusă acţiunii unei sarcini exterioare de $P = 100\ [N]$.

Rezolvare:

Se utilizează *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.17.a) la care se adaugă *teorema echilibrului părţilor* pentru subsistemul constituit numai din tija BFC (fig. Apl-2.17.b).

Expresia vectorului tensiune (efort) din cablul DE se stabileşte în funcţie de direcţia cablului definită de către versorul acestei, cu expresia:

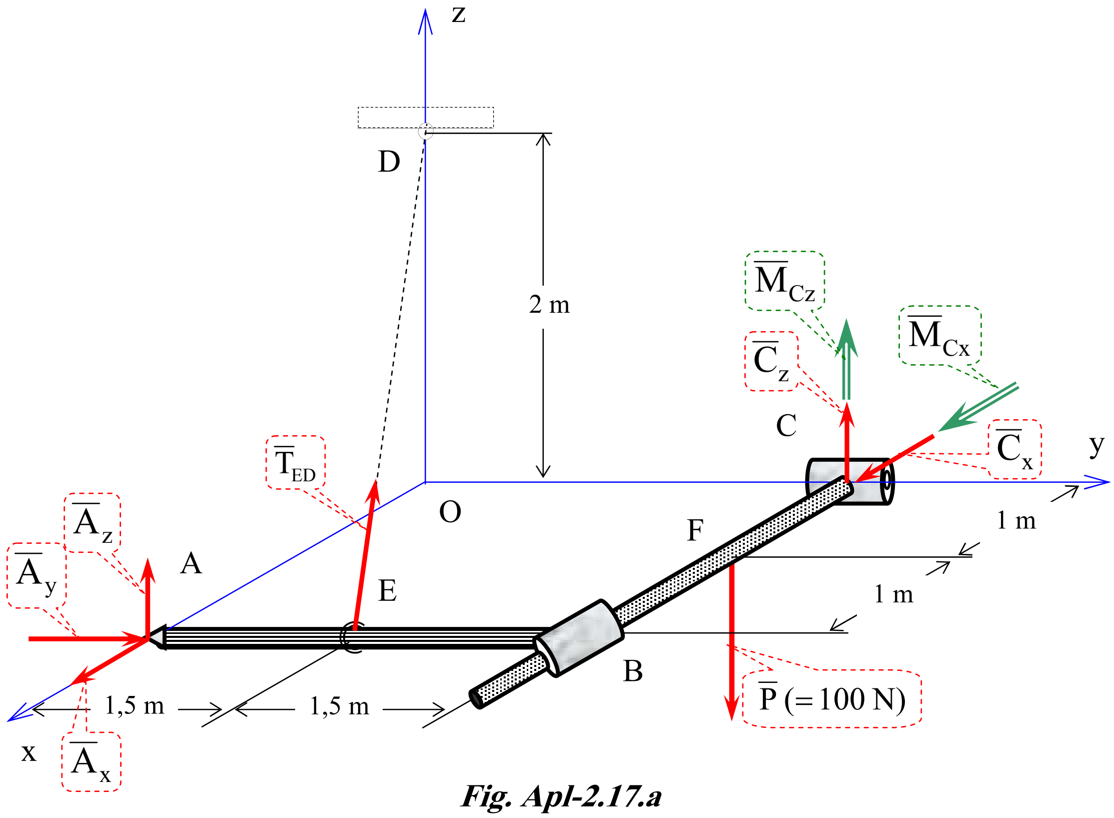


Fig. Apl-2.17.a

$$\overline{u}_{DE} = \frac{-2\cdot\overline{i} - 1{,}5\cdot\overline{j} + 2\cdot\overline{k}}{\sqrt{2^2 + 1{,}5^2 + 2^2}} = -0{,}625\cdot\overline{i} - 0{,}469\cdot\overline{j} + 0{,}625\cdot\overline{k}\,.$$

Din condiţia de coliniaritate a versorului $\overline{u}_{DE}$ cu vectorul tensiune $\overline{T}_{DE}$, rezultă expresia vectorului tensiune (efort) din cablul DE:

$$\overline{T}_{DE} = T_{DE}\cdot\overline{u}_{DE}\ ;$$

$$\Rightarrow\quad \overline{T}_{DE} = -0{,}625\cdot T_{DE}\cdot\overline{i} - 0{,}469\cdot T_{DE}\cdot\overline{j} + 0{,}625\cdot T_{DE}\cdot\overline{k}\,.$$

Ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de corpuri solidificat (fig. Apl-2.17.a), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în O, sunt:

$$\begin{cases} A_x - 0{,}625 \cdot T_{DE} + C_x = 0, \\ A_y - 0{,}469 \cdot T_{DE} = 0, \\ A_z - P + C_z = 0, \\ M_{Cx} + C_z \cdot 3 - P \cdot 3 + 0{,}625 \cdot T_{DE} \cdot 1{,}5 = 0, \\ -A_z \cdot 2 - 0{,}625 \cdot T_{DE} \cdot 2 + P \cdot 1 = 0, \\ M_{Cz} - C_x \cdot 3 + A_y \cdot 2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

În continuare se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru subsistemul constituit numai din tija BFC (fig. Apl-2.17.b) avându-se în vedere că în punctele C (legătură exterioară) respectiv B (legătură interioară) sunt articulaţii cilindrice spaţiale fără frecare, adică introduc forţe şi momente de legătură de direcţii cunoscute şi mă-rimi necunoscute.

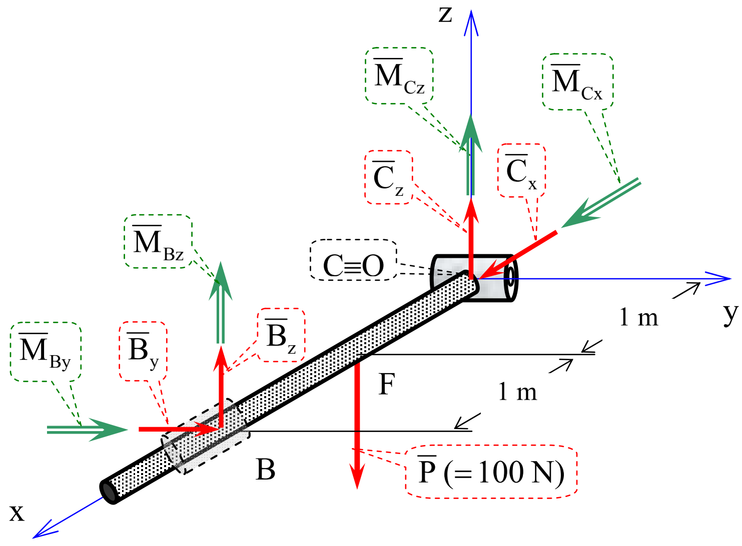


Fig. Apl-2.17.b

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul constituit numai din tija BFC, în sistemul de referinţă cartezian cu originea în C (fig. Apl- 2.17.b) sunt:

$$\begin{cases} C_x = 0, \\ B_y = 0, \\ C_z - P + B_z = 0, \\ M_{Cx} = 0, \\ M_{By} + P \cdot 1 - B_z \cdot 2 = 0, \\ M_{Cz} + M_{Bz} + B_y \cdot 2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul de 12 ecuaţii liniare constituit din grupurile de ecuaţii (1) şi (2) obţinem reacţiunile din punctele A şi C (forţe de legătură exterioare), respectiv B (forţe de legătură interioare):

- din ecuaţiile (1_3)- $(1_4/3)$+ $(1_5/2)$

$$T_{DE} = \frac{1}{0{,}3125+0{,}625}\cdot\frac{1}{2}\cdot P = \frac{1}{0{,}3125+0{,}625}\cdot\frac{1}{2}\cdot 100 = 53{,}33\,[N] \quad ;$$

- din ecuaţiile (2_1), (2_2) şi (2_4)

$$\Rightarrow \quad C_x = 0; \quad B_y = 0 \quad \text{şi} \quad M_{Cx} = 0;$$

- din ecuaţiile (1_1) şi (1_2)

$$A_x = 0{,}625\cdot T_{DE} = 0{,}625\cdot 53{,}33 = 33{,}33\,[N];$$
$$A_y = 0{,}469\cdot T_{DE} = 0{,}469\cdot 53{,}33 = 25{,}013\,[N];$$

- din ecuaţia (1_4)

$$C_z = P - \frac{1}{3}\cdot 0{,}625\cdot T_{DE}\cdot 1{,}5 = 100 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}625\cdot 53{,}33\cdot 1{,}5 = 83{,}33\,[N] \;;$$

- din ecuaţiile (1_3) şi (2_3)

$$A_z = P - C_z = 100 - 83{,}33 = 16{,}67\,[N];$$
$$B_z = P - C_z = 100 - 83{,}33 = 16{,}67\,[N];$$

- din ecuaţiile (1_6), (2_5) şi (2_6)

$$M_{Cz} = -2\cdot A_y = -2\cdot 25{,}013 = -50{,}026\,[N\cdot m];$$
$$M_{By} = 2\cdot B_z - P = 2\cdot 16{,}67 - 100 = -66{,}67\,[N\cdot m];$$
$$M_{Bz} = -M_{Cz} = -(-50{,}026)\,[N\cdot m] = 50{,}026\,[N\cdot m].$$

Rezolvarea sistemului (1)+(2) cu ajutorul procedurilor din MATHCAD. În tabel sunt introduşi coeficienţii necunoscutelor sistemului şi termenii liberi.

	A_x	A_y	A_z	B_z	C_z	M_{By}	M_{Bz}	M_{Cz}	T_{DE}	Membr. 2
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	-0,625	0
2.	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,469	0
3.	0		1	0	1	0	0	0	0	100
4.	0	0	0	0	3	0	0	0	0,9375	300
5.	0	0	-2	0	0	0	0	0	-1,25	-100

6.	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0
7.	0	0	0	1	1	0	0	0	0	100
8.	0	0	0	-2	0	1	0	0	0	-100
9.	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
REZ.	33,33 [N]	25,01 [N]	16,67 [N]	16,67 [N]	83,33 [N]	-66,67 [Nm]	50,02 [Nm]	-50,02 [Nm]	53,33 [N]	-

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.625 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.469 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0.9375 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 300 \\ -100 \\ 0 \\ 100 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soln} := \text{lsolve}(M, v) \qquad \text{Solution:} \quad \text{soln} = \begin{pmatrix} 33.33333 \\ 25.01333 \\ 16.66667 \\ 16.66667 \\ 83.33333 \\ -66.66667 \\ 50.02667 \\ -50.02667 \\ 53.33333 \end{pmatrix} \qquad \text{"elem sol"} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ B_z \\ C_z \\ M_{By} \\ M_{Bz} \\ M_{Cz} \\ T_{DE} \end{pmatrix}$$

Apl. 2.18

Să se determine reacţiunile din articulaţiile cilindrice B şi C (legături interioare) pentru sistemul de corpuri reprezentat în figura Apl-2.18, supus acţiunii unei sarcini de masă $m = 100\,[\text{kg}]$. Se neglijează greutăţile barelor sistemului.

Rezolvare:
Metoda I^{-a}

Se aplică *teorema echilibrului părţilor* dublată de *teorema solidificării* pentru subsistemul constituit din corpurile: barele DC şi BD, şi discul de rază $r = 0{,}1\,[\text{m}]$. Se are în vedere că articulaţiile cilindrice C şi D sunt conectate între ele printr-o bară astfel că direcţia reacţiunii din C este cunoscută şi anume în lungul barei DC (fig. Apl-2.18.a).

Ecuaţiile de echilibru pentru acest subsistem de corpuri, solidificat într-un

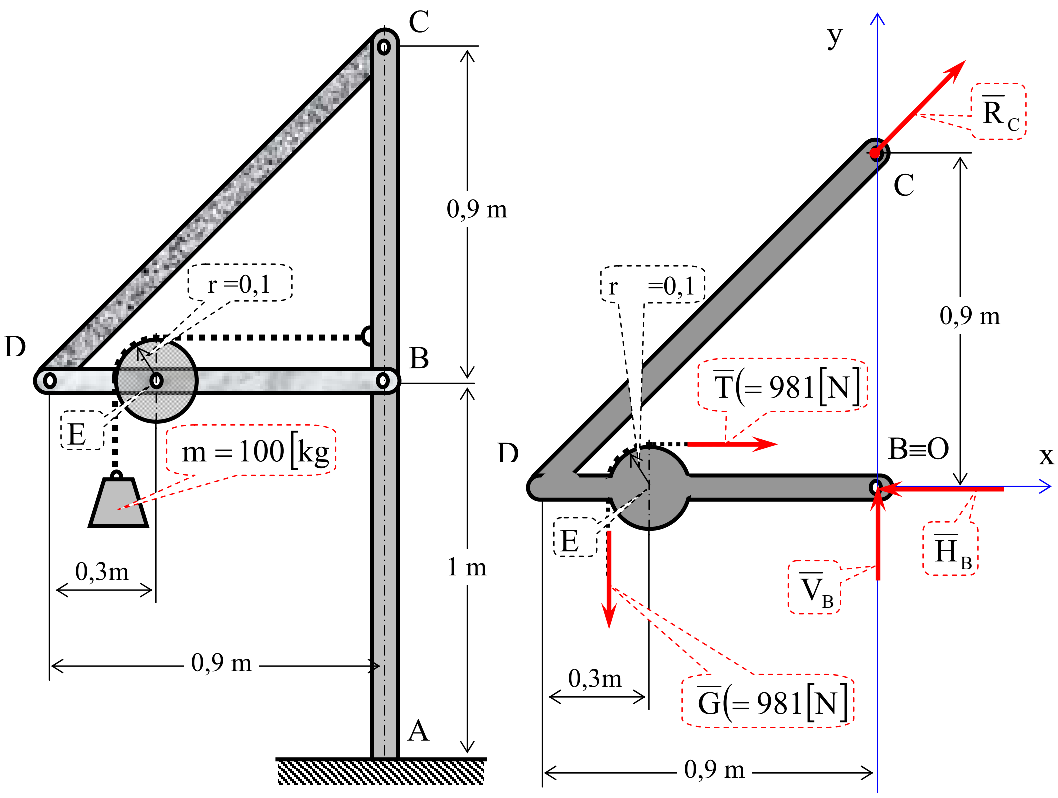


Fig. Apl-2.18 *Fig. Apl-2.18.a*

solid rigid virtual raportat la sistemul de axe carteziene cu originea în punctul B, sunt:

$$\begin{cases} R_C \cdot \cos 45^\circ - H_B + T = 0, \\ R_C \cdot \sin 45^\circ - G + V_B = 0, \\ G \cdot (0{,}9 - 0{,}3 + 0{,}1) - T \cdot 0{,}1 - R_C \cdot \cos 45^\circ \cdot 0{,}9 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvând sistemul de trei ecuaţii liniare (1) obţinem:

din ec. (1_3)

$$\Rightarrow \quad R_C = \frac{1}{0{,}9 \cdot \cos 45^\circ} \cdot (G \cdot 0{,}7 - T \cdot 0{,}1) =$$

$$= \frac{1}{0{,}9 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 981 \cdot 0{,}6 = 924{,}896\,[N]; \qquad \blacklozenge\ (1_3')$$

din ec. (1_1)

$$H_B = R_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T = 924{,}896 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 981 = 1635\,[N]; \qquad \blacklozenge\ (1_1\text{'})$$

din ec. (1_2)

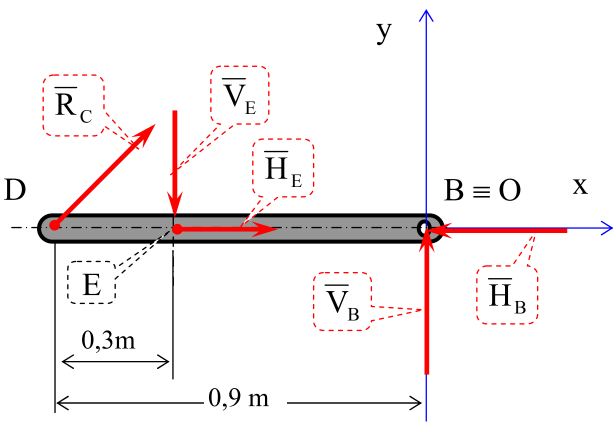


Fig. Apl-2.18.b

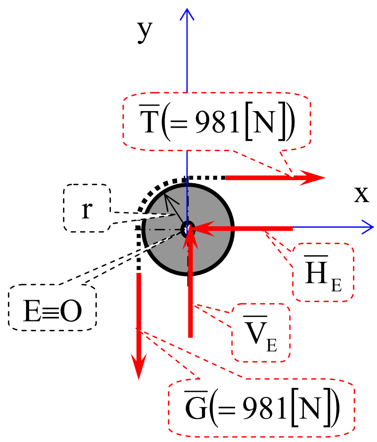


Fig. Apl-2.18.c

$$V_B = G - R_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 981 - 924{,}896 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 327\,[N]. \qquad \blacklozenge\ (1_2\text{'})$$

Deci, reacţiunea din articulaţia cilindrică C este deja determinată rel. (1_3') iar cea din B rezultă prin aplicarea regulii paralelogramului, adică:

$$R_B = \sqrt{(H_B)^2 + (V_B)^2} = \sqrt{(1635)^2 + (327)^2} = 1667{,}379\,[N]. \ \blacklozenge$$

Metoda II^{-a}

Se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru fiecare din corpurile: bara BD (fig. Apl- 2.18.b) şi discul de rază $r = 0{,}1\,[m]$ (fig. Apl-2.18.c). Se are în vedere că articulaţiile cilindrice C şi D sunt conectate între ele printr-o bară astfel că direcţia reacţiunii din D este cunoscută şi anume în lungul barei DC.

Ecuaţiile de echilibru pentru fiecare din corpurile eliberate de legături, în raport cu sistemele de axe carteziene indicate în figurile corespunzătoare, sunt:

- pentru bara DB

$$\begin{cases} -H_B + T + R_C \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ V_B + R_C \cdot \sin 45^\circ - G = 0, \\ G \cdot 0{,}6 - R_C \cdot \cos 45^\circ \cdot 0{,}9 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

- pentru disc

$$\begin{cases} T - H_E = 0, \\ V_E - G = 0, \\ G \cdot 0{,}1 - T \cdot 0{,}1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Rezolvând sistemele de ecuaţii liniare (2) respectiv (3) obţinem: din sistemul de ec. (3)

$$T = H_E = G = 981\,[N] \quad \text{şi} \quad V_E = G = 981\,[N];$$

din ec. (2_3)

$$\Rightarrow \quad R_C = \frac{0{,}6}{0{,}9 \cdot \cos 45^o} \cdot G = \frac{0{,}6}{0{,}9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 981 = 924{,}896\,[N]; \quad \blacklozenge$$

din ec. (2_1)

$$H_B = R_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T = 924{,}896 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 981 = 1635\,[N];$$

din ec. (2_2)

$$V_B = G - R_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 981 - 924{,}896 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 327\,[N].$$

Deci, reacţiunea din articulaţia cilindrică C este deja determinată iar cea din B rezultă prin aplicarea regulii paralelogramului, adică:

$$R_B = \sqrt{(H_B)^2 + (V_B)^2} = \sqrt{(1635)^2 + (327)^2} = 1667{,}379\,[N]. \quad \blacklozenge$$

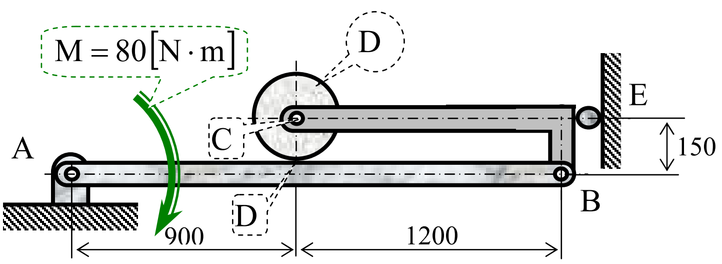


Fig. Apl-2.19

Apl. 2.19

Să se determine forţa exercitată de către discul ***D*** asupra barei AB (fig. Apl- 2.19).

Deasemeni să se determine componentele orizontală şi verticală ale reacţiunii din A. Se neglijează greutăţile barelor sistemului.

Rezolvare:

Se utilizează *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.19.a) la care se adaugă *teorema echilibrului părţilor* pentru subsistemul constituit din disc şi tija BEC (fig. Apl-2.19.b).

Ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de corpuri solidificat (fig. Apl-2.19.a), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în O ≡ **A**, sunt:

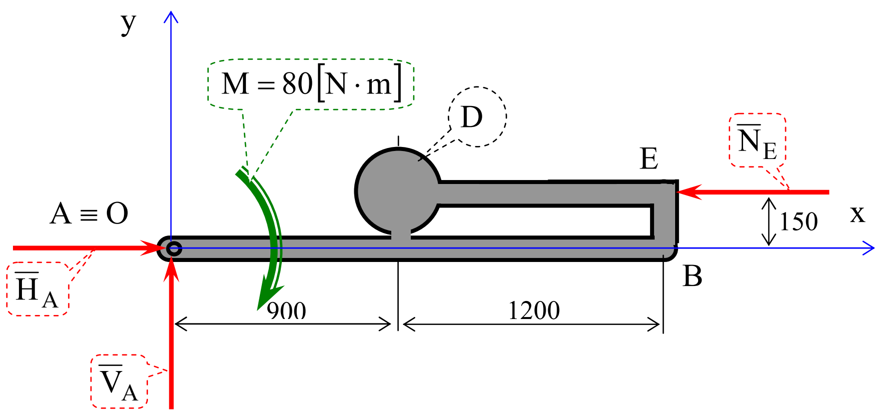


Fig. Apl-2.19.a

$$\begin{cases} H_A - N_E = 0, \\ V_A = 0, \\ N_E \cdot 0{,}15 - M = 0. \end{cases}$$

şi rezolvând, obţinem:

$$\Rightarrow \begin{cases} N_E = \dfrac{M}{0{,}15} = \dfrac{80}{0{,}15} = 533{,}33[N], \\ H_A = N_E = 533{,}33[N], \\ V_A = 0. \end{cases} \qquad \blacklozenge$$

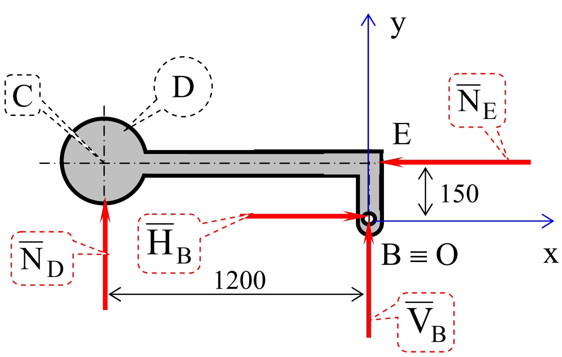


Fig. Apl-2.19.b

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul solidificat, constituit din bara cotită BEC şi discul ***D*** de greutăţi neglijabile (*teorema echilibrului părţilor* + *teorema solidificării*), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în B ≡ O (fig. Apl-

2.19.b), sunt:

$$\begin{cases} H_B - N_E = 0, \\ N_D - V_B = 0, \\ N_E \cdot 0{,}15 - N_D \cdot 1{,}2 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_D = \frac{N_E}{0{,}15} = \frac{533{,}33 \cdot 0{,}15}{1{,}2} = 66{,}67\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Apl. 2.20

Să se determine mărimile componentelor orizontale şi verticale ale

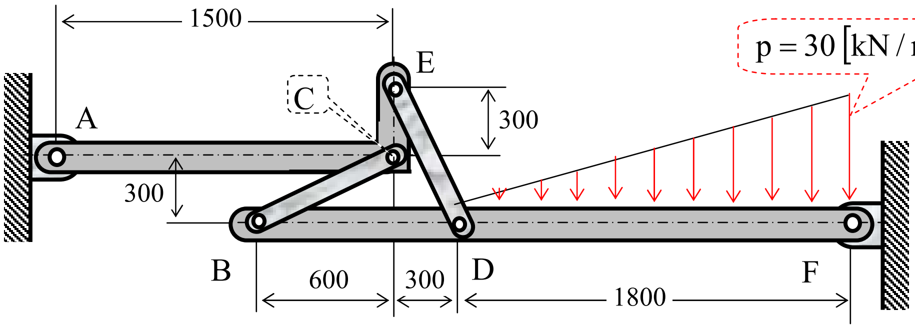


Fig. Apl-2.20

reacţiunilor din A şi F, pentru sistemul de corpuri din figura Apl-2.20. Încărcarea este realizată printr-o forţă distibuită liniar pe tronsonul DF al barei orizontale BF.

Rezolvare:

METODA I^a

Se aplică teorema echilibrului părţilor pentru barele ACE (fig. Apl-2.20.a) respectiv BDF (fig. Apl-2.20.b) având-se în vedere că între punctele C şi B respectiv D şi E sunt legături cu tije rigide, adică introduc forţe de legătură interioare sistemului de corpuri, de direcţii cunoscute şi mărimi necunoscute.

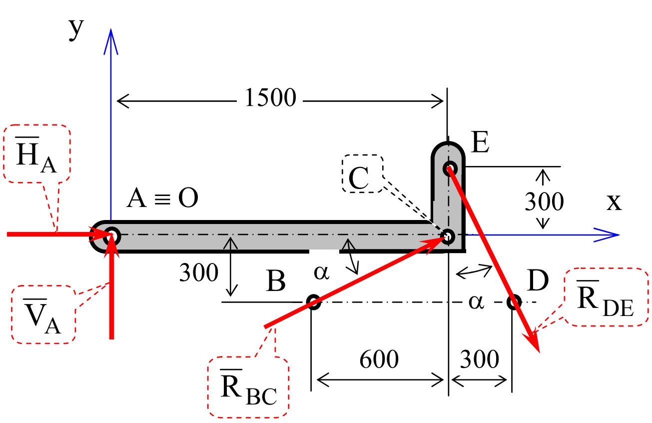
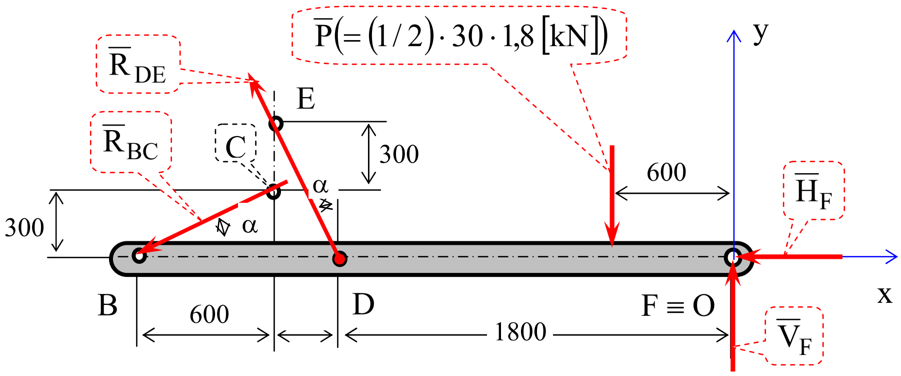


Fig. Apl-2.20.a

Ecuaţiile de echilibru pentru bara ACE, în sistemul de referinţă cartezian cu originea în A, sunt:

$$\begin{cases} R_{BC}\cdot\cos\alpha + R_{DE}\cdot\sin\alpha + H_A = 0, \\ R_{BC}\cdot\sin\alpha - R_{DE}\cdot\cos\alpha + V_A = 0, \\ R_{BC}\cdot\sin\alpha\cdot 1{,}5 - R_{DE}\cdot\cos\alpha\cdot 1{,}5 - R_{DE}\cdot\sin\alpha\cdot 0{,}3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$



Faţă de sistemul de referinţă cartezian cu originea în F, ecuaţiile de echilibru pentru bara BDF sunt:

Fig. Apl-2.20.b

$$\begin{cases} -H_F - R_{BC}\cdot\cos\alpha - R_{DE}\cdot\sin\alpha = 0, \\ -R_{BC}\cdot\sin\alpha + R_{DE}\cdot\cos\alpha + V_F - P = 0, \\ R_{BC}\cdot\sin\alpha\cdot 2{,}7 - R_{DE}\cdot\cos\alpha\cdot 1{,}8 + P\cdot 0{,}6 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{300}{600} = 26{,}565^\circ;\ P = \frac{1}{2}\cdot p\cdot 1{,}8 = \frac{1}{2}\cdot 30[kN/m]\cdot 1{,}8[m] = 27\,[kN].$$

Din ecuaţiile (1_3) şi (2_3) se determină reacţiunile R_{BC} şi R_{DE}:

$$\begin{cases} R_{BC}\cdot\sin 26{,}56^\circ\cdot 1{,}5\cdot 9 - R_{DE}\cdot\cos 26{,}56^\circ\cdot 1{,}5\cdot 9 - R_{DE}\cdot\sin 26{,}56^\circ\cdot 0{,}3\cdot 9 = 0; \\ R_{BC}\cdot\sin 26{,}56^\circ\cdot 2{,}7\cdot 5 - R_{DE}\cdot\cos 26{,}56^\circ\cdot 1{,}8\cdot 5 + P\cdot 0{,}6\cdot 5 = 0. \end{cases}$$

$$R_{DE} = \frac{P\cdot 0{,}6\cdot 5}{-\cos 26{,}56^\circ\cdot 1{,}5\cdot 9 - \sin 26{,}56^\circ\cdot 0{,}3\cdot 9 + \cos 26{,}56^\circ\cdot 1{,}8\cdot 5},$$

$$R_{DE} = \frac{27000\cdot 0{,}6\cdot 5}{-\cos 26{,}56^\circ\cdot 1{,}5\cdot 9 - \sin 26{,}56^\circ\cdot 0{,}3\cdot 9 + \cos 26{,}56^\circ\cdot 1{,}8\cdot 5},$$

$$\Rightarrow\quad R_{DE} = -15.487{,}9\,[N],$$

$$R_{BC} = \frac{R_{DE} \cdot \cos 26{,}56^{o} \cdot 1{,}8 - P \cdot 0{,}6}{\sin 26{,}56^{o} \cdot 2{,}7},$$

$$R_{BC} = \frac{-15487{,}9 \cdot \cos 26{,}56^{o} \cdot 1{,}8 - 27000 \cdot 0{,}6}{\sin 26{,}56^{o} \cdot 2{,}7} = -34073{,}35\,[\mathrm{N}],$$

$$R_{BC} = -34073{,}35\,[\mathrm{N}].$$

Din ecuaţiile (1_1) şi (1_2) se determină componentele reacţiunilor din articulaţia A (H_A şi V_A):

$$\Rightarrow \quad H_A = -R_{BC} \cdot \cos\alpha - R_{DE} \cdot \sin\alpha,$$

şi $$V_A = -R_{BC} \cdot \sin\alpha + R_{DE} \cdot \cos\alpha.$$

$$H_A = -(-34073{,}3 \cdot 0{,}894 - 15487{,}9 \cdot 0{,}447) = \mathbf{37.385}\,[\mathbf{N}]; \quad \blacklozenge$$

$$V_A = -(-34073{,}3) \cdot 0{,}447 + (-15487{,}9) \cdot 0{,}894 = 1.385\,[\mathbf{N}]. \quad \blacklozenge$$

Din ecuaţiile (2_1) şi (2_2) se determină componentele reacţiunilor din articulaţia F (H_F şi V_F):

$$\Rightarrow \quad H_F = -R_{BC} \cdot \cos\alpha - R_{DE} \cdot \sin\alpha,$$

şi

$$V_F = P + R_{BC} \cdot \sin\alpha - R_{DE} \cdot \cos\alpha.$$

$$\Rightarrow \quad H_F = -(-34073{,}3 \cdot 0{,}894 - 15487{,}9 \cdot 0{,}447) = 37.385\,[\mathrm{N}]; \quad \blacklozenge$$

$$V_F = 27000 + (-34073{,}3) \cdot 0{,}447 - (-15487{,}9) \cdot 0{,}894 = 25615\,[\mathrm{N}]. \blacklozenge$$

METODA II^a

În prima etapă se aplică teorema solidificării întregului sistem de corpuri păstrând legăturile exterioare care se înlocuiesc cu forţele de legătură corespunzătoare, în conformitate cu axioma legăturilor (fig. Apl-2.20.c).

Ecuaţiile de echilibru pentru rigidul obţinut în urma aplicării teoremei solidificării, în sistemul de referinţă cu originea în A, sunt:

$$\begin{cases} H_A - H_F = 0, \\ V_A + V_F - P = 0, \\ V_F \cdot 3{,}6 - P \cdot 3 - H_F \cdot 0{,}3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

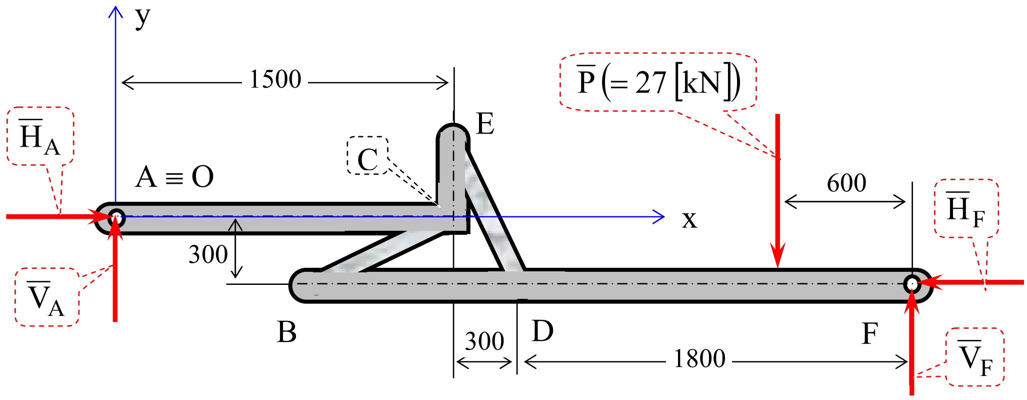


Fig. Apl-2.20.c

În etapa doua se aplică teorema echilibrului părţilor pentru bara ACE (fig. Apl-2.20.d) pentru a scrie o a patra ecuaţie care grupată cu ecuaţiile (3) să formeze un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute.

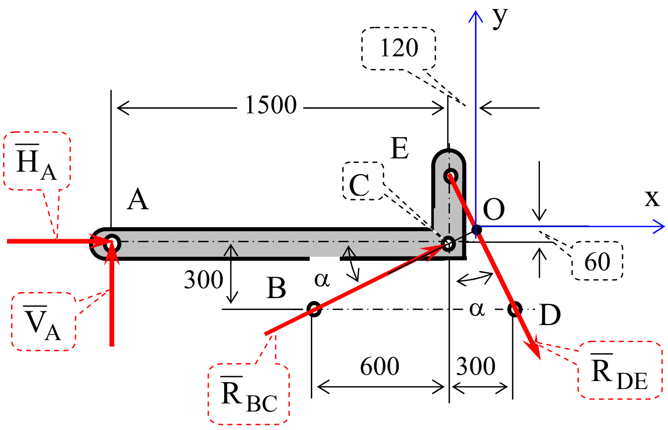


Fig. Apl-2.20. d

Ecuaţiile de echilibru pentru bara ACE sunt în număr de trei dar în ecuaţiile de proiecţii pe axele Ox şi Oy apar şi necunoscutele R_{BC} şi R_{DE} care nu sunt cerute prin întrebările problemei.

Deoarece avem nevoie de încă o ecuaţie pe lângă cele trei din sistemul (3) dar care să nu introducă necunoscute suplimentare vom determina poziţia punctului de intersecţie al reacţiunilor interioare sistemului de corpuri (eforturile din barele BC şi DE) pe care îl alegem origine a sistemului de axe (fig. Apl-2.20.d) şi scriem numai ecuaţia de momente (4), astfel:

$$H_A \cdot 0.06 - V_A \cdot 1{,}62 = 0 . \qquad (4)$$

Cu proceduri ale programului *MATHCAD 14* rezolvăm matricial sistemul de patru ecuaţii constituit din grupurile (3) şi (4), astfel:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}3 & 3{,}6 \\ 0{,}06 & -1{,}62 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- se introduce vectorul celor 4 constante (termeni liberi în ecuaţiile sistemului) :

$$V := \begin{Bmatrix} 0 \\ 27000 \\ 3\cdot 27000 \\ 0 \end{Bmatrix} [N];$$

- se aplică funcţia lsolve(M,v) şi se obţine vectorul cu valorile necunoscutelor:

$$\begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_F \\ V_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 37.385 \\ 1.385 \\ 37.385 \\ 25.615 \end{Bmatrix} [N].$$

Apl. 2.21

Pentru sistemul de corpuri (bare rectilinii de greutăţi neglijabile, articulate cilindric între ele şi la sistemul fix) din figura Apl-2.21 să se determine:

a) reacţiunile din A şi E;

b) componentele forţelor din B şi C de pe bara ABC.

Rezolvare:

a) Se aplică *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.21.a) astfel că ecuaţiile de echilibru pentru solidul rigid rezultat din solidificare sunt:

$$\begin{cases} H_A + F_2 = 0, \\ V_A + N_E - F_3 - F_1 = 0, \\ 4{,}8\cdot N_E + 1{,}8\cdot F_2 - 3\cdot F_3 - 2{,}4\cdot F_1 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Din ecuaţia (1_3) se obţine:

$$N_E = \frac{1}{4{,}8}\cdot\left(3\cdot F_3 + 2{,}4\cdot F_1 - 1{,}8\cdot F_2\right) =$$

$$= \frac{1}{4{,}8}\cdot\left(3\cdot 800 + 2{,}4\cdot 1600 - 1{,}8\cdot 800\right);$$

$$\Rightarrow \quad N_E = 1000\,[N]. \qquad \blacklozenge$$

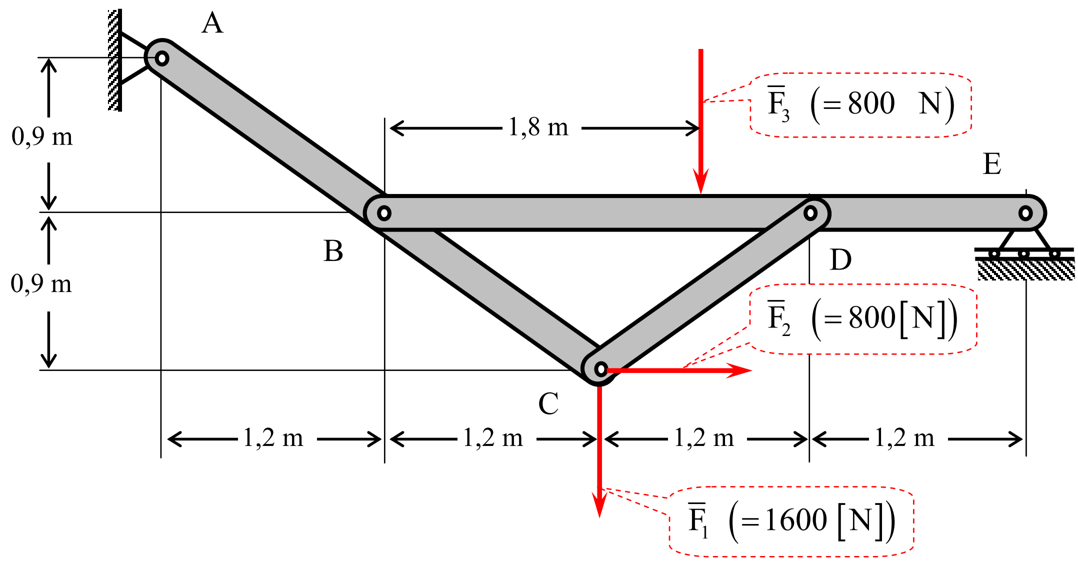


Fig. Apl-2.21

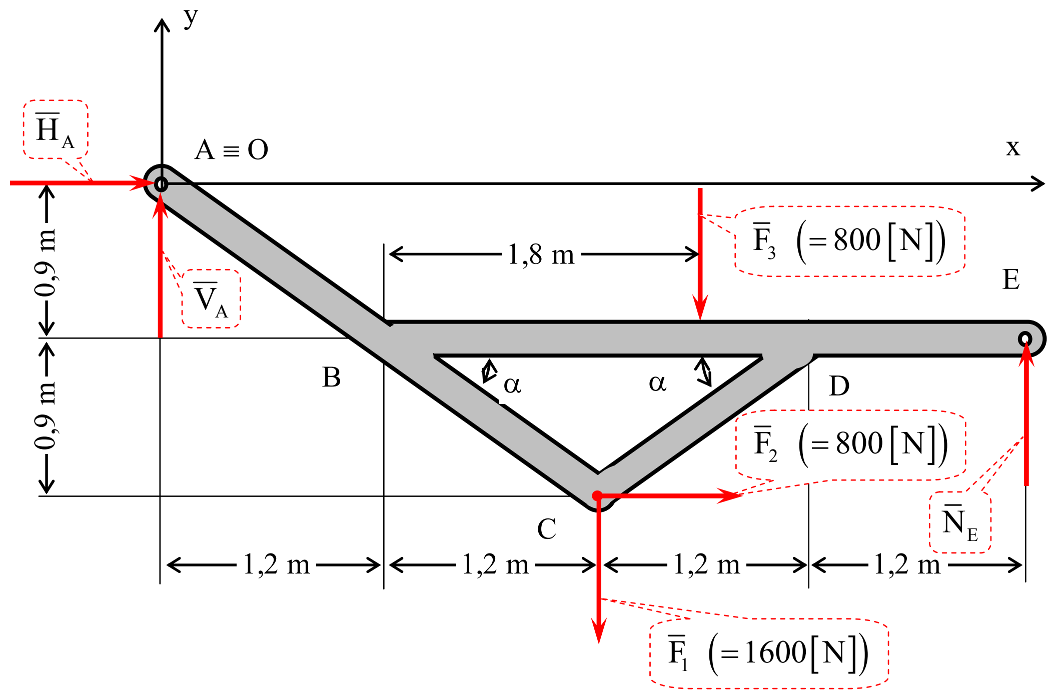


Fig. Apl-2.21.a

Din ecuaţia (1_1) se obţine:

$$\Rightarrow \quad H_A = -F_2 = -800\,[N]. \qquad \blacklozenge$$

Din ecuaţia (1_2) se obţine:

$$V_A = F_1 + F_3 - N_E = 1600 + 800 - 1000\,[\mathrm{N}],$$
$$\Rightarrow \quad V_A = 1400\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

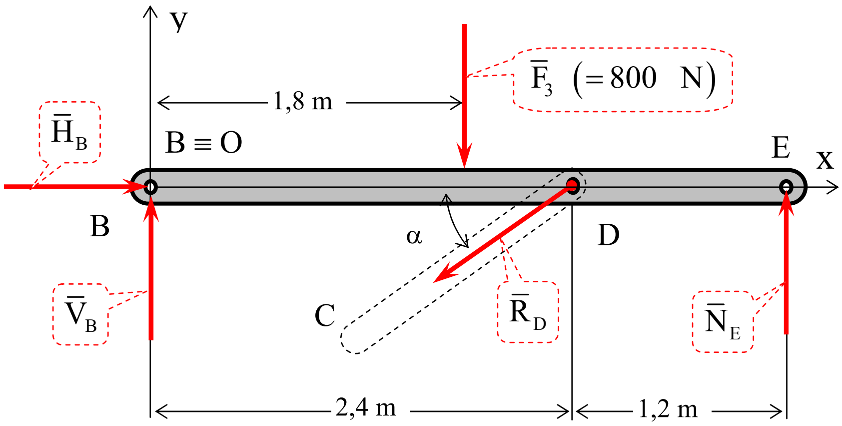


Fig. Apl-2.21.b

b) Se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara BE (fig. Apl-2.21.b) astfel că ecuaţiile de echilibru corespunzătoare sunt:

$$\begin{cases} H_B - R_D \cdot \cos\alpha = 0, \\ V_B - R_D \cdot \sin\alpha + N_E - F_3 = 0, \\ 3{,}6 \cdot N_E - 2{,}4 \cdot R_D \cdot \sin\alpha - 1{,}8 \cdot F_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Din ecuaţia (2_3) se obţine:

$$R_D = \frac{1}{2{,}4 \cdot \sin\alpha} \cdot (3{,}6 \cdot N_E - 1{,}8 \cdot F_3) = \frac{1}{2{,}4 \cdot \frac{3}{5}} \cdot (3{,}6 \cdot 1000 - 1{,}8 \cdot 800);$$

$$\Rightarrow \quad R_D = 1500\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Din ecuaţia (2_1) se obţine:

$$H_B = R_D \cdot \cos\alpha = 1500 \cdot \frac{4}{5} = 1200\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Din ecuaţia (2_2) se obţine:

$$V_B = R_D \cdot \sin\alpha - N_E + F_3 = 1500 \cdot \frac{3}{5} - 1000 + 800 = 700\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara AC (fig. Apl-2.21.c).

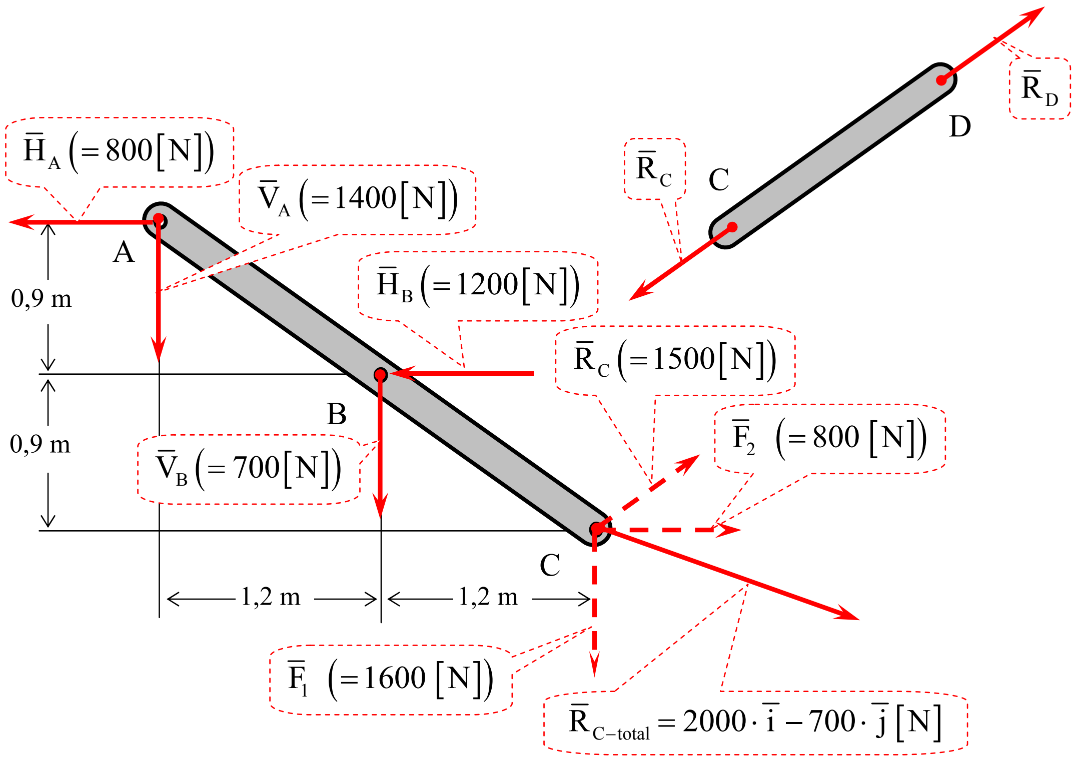


Fig. Apl-2.21.c

Forţele în B $\left(\overline{H}_B, \overline{V}_B\right)$ ce acţionează asupra barei AC sunt opuse celor calculate din echilibrul barei BE.

Forţa totală în C, ce acţionează asupra barei AC, este:

$$\overline{R}_{C-total}=\left(R_C\cdot\cos\alpha+F_2\right)\cdot\overline{i}+\left(R_C\cdot\sin\alpha-F_1\right)\cdot\overline{j}\ ;$$

$$\Rightarrow\quad R_{C-total}=\left(1500\cdot\frac{4}{5}+800\right)\cdot\overline{i}+\left(1500\cdot\frac{3}{5}-1600\right)\cdot\overline{j}=$$
$$=2000\cdot\overline{i}-700\cdot\overline{j}\,[N].$$ ♦

Deci $\overline{R}_A=-800\cdot\overline{i}+1400\cdot\overline{j}\,[N];\ \ \overline{N}_E=1000\cdot\overline{j}\,[N];$ ♦

$\overline{R}_B=-1200\cdot\overline{i}-700\cdot\overline{j}\,[N];\ \ \overline{R}_C=2000\cdot\overline{i}-700\cdot\overline{j}\,[N].$ ♦

Apl. 2.22

Să se determine forţa exercitată de către ştiftul din C asupra barei ABC (fig. Apl-2.22). Se neglijează greutăţile barelor. Ştiftul B este ataşat solidar la bara BD şi se reazemă în canalul neted al barei ABC.

Rezolvare:

a) Se aplică *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.22.a).

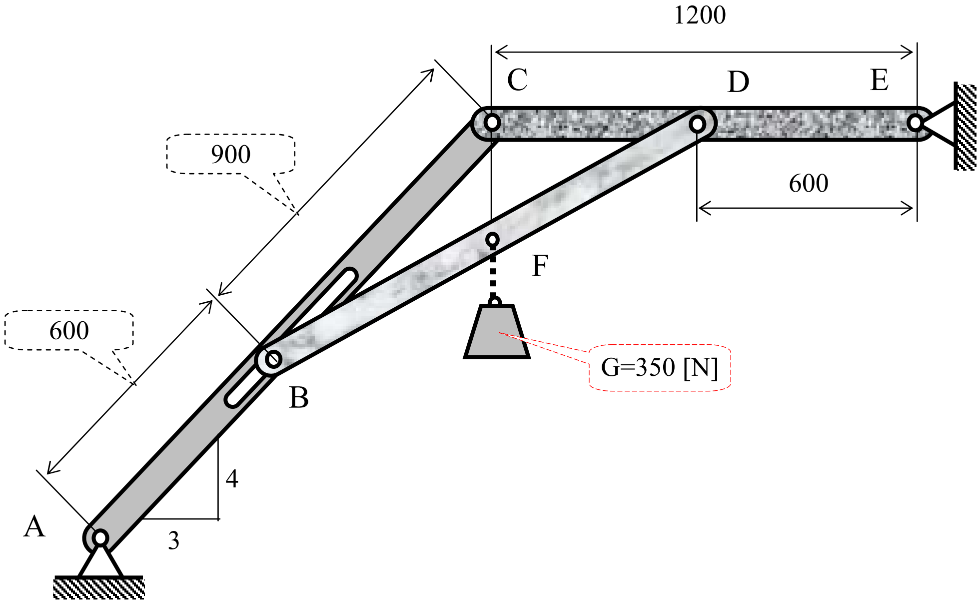


Fig. Apl-2.22

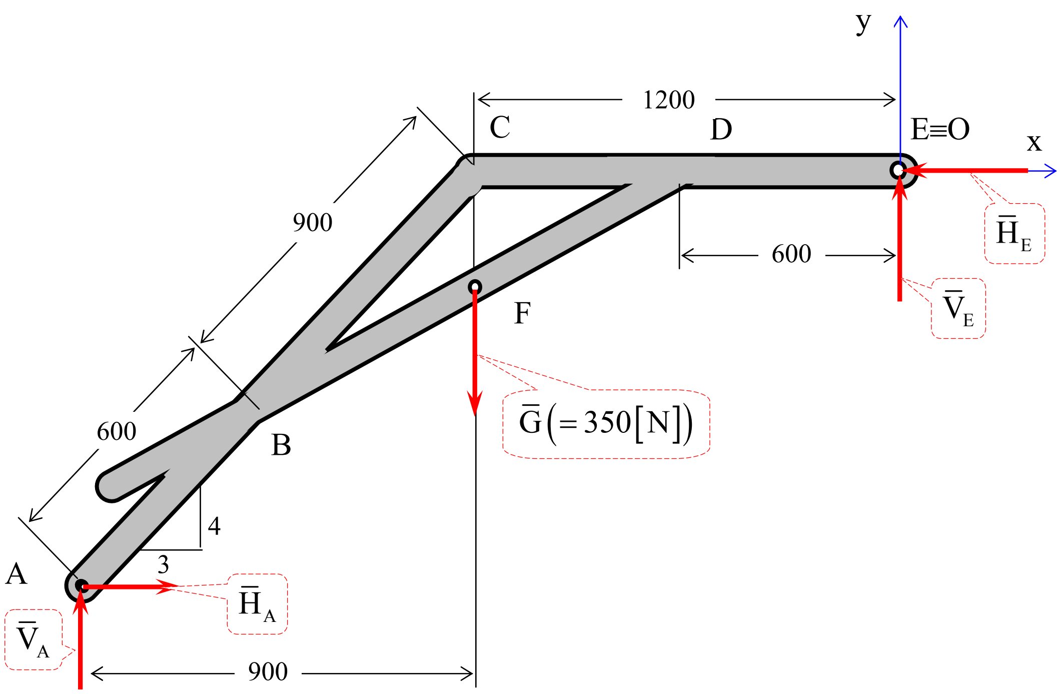


Fig. Apl-2.22.a

Din aplicarea teoremei solidificării se utilizează numai ecuaţia de momente scrisă în raport cu articulaţia cilindrică E, care are forma (1):

$$G \cdot 1{,}2 + H_A \cdot 1{,}5 \cdot \frac{4}{5} - V_A \cdot 2{,}1 = 0\,. \qquad (1)$$

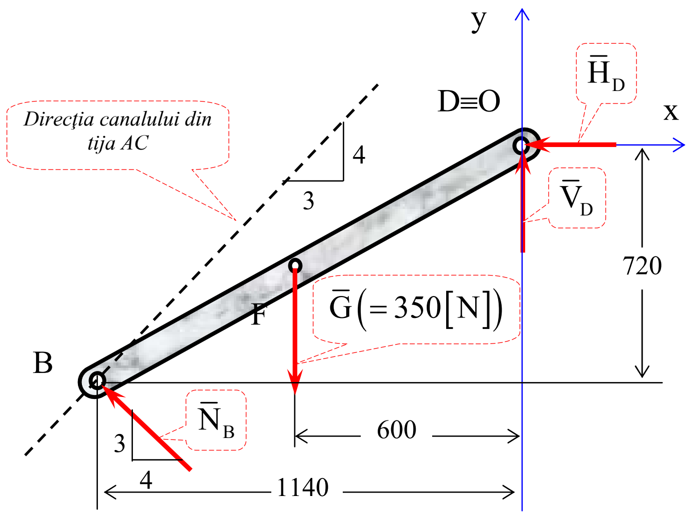


Fig. Apl-2.22.b

Apoi se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara BFD (fig. Apl-2.22.b) şi se utilizează numai ecuaţia de momente scrisă în raport cu articulaţia cilindrică D, de forma (2) şi din care se determină mărimea reacţiunii din B :

$$G \cdot 0{,}6 - N_B \cdot \frac{4}{5} \cdot 0{,}72 - N_B \cdot \frac{3}{5} \cdot 1{,}14 = 0\,, \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad N_B = (0{,}6/1{,}26) \cdot G = (0{,}6/1{,}26) \cdot 350 = 166{,}67\,[N].$$

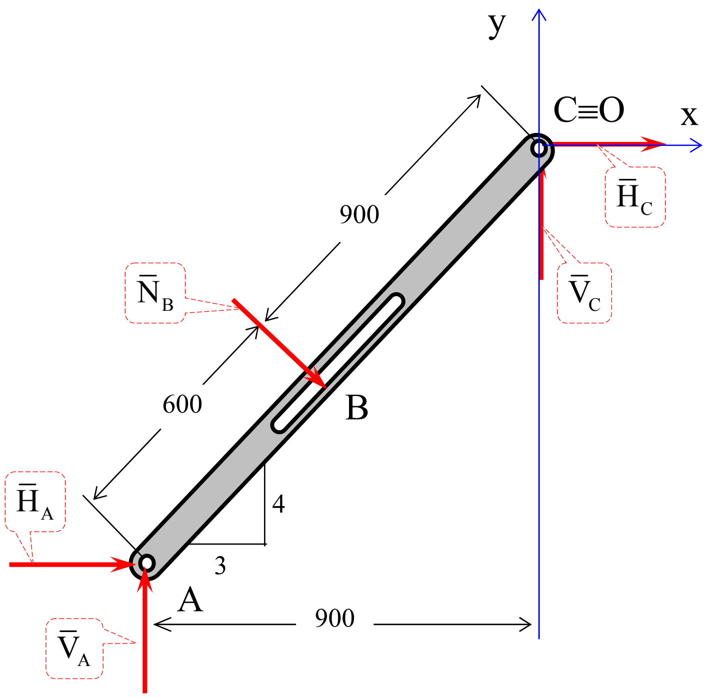


Fig. Apl-2.22.c

Pentru a ajunge la necunoscuta cerută în întrebare, se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara ABC (fig. Apl-2.22.c).

Ecuaţiile de echilibru corespunzătoare, scrise în raport cu un sistem de referinţă cu originea în C, sunt:

$$\begin{cases} H_C + H_A + N_B \cdot (4/5) = 0, \\ V_C + V_A - N_B \cdot (3/5) = 0, \\ N_B \cdot 0,9 + H_A \cdot 1,5 \cdot (4/5) - V_A \cdot 0,9 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Din diferenţa ecuaţiilor (1) - (3_3) se obţine:

$$1,2 \cdot G - 2,1 \cdot V_A + 0,9 \cdot V_A - 0,9 \cdot N_B = 0. \tag{4}$$

Din ecuaţiile (4) respectiv (1) se obţin mărimile componentelor reacţiunii din articulaţia cilindrică A:

$$V_A = \frac{1}{1,2} \cdot (1,2 \cdot 350 - 0,9 \cdot 166,67) = 225\,[\mathrm{N}] \ ;$$

$$H_A = \frac{1}{1,2} \cdot (1,2 \cdot 225 - 1,2 \cdot 350) = 43,75\,[\mathrm{N}] \ .$$

Din ecuaţiile (3_1) respectiv (3_2) se obţin mărimile componentelor reacţiunii din articulaţia cilindrică C:

$$H_C = -H_A - N_B \cdot \frac{4}{5} = -43,75 - 166,67 \cdot \frac{4}{5} = -177\,[\mathrm{N}] \ ;$$

$$V_C = -V_A + N_B \cdot (3/5) = -225 + 166,67 \cdot (3/5) = -125\,[\mathrm{N}].$$

Deci, forţa exercitată de către ştiftul din C asupra barei ABC este:

$$\Rightarrow \quad \overline{R}_C = -177 \cdot \overline{i} - 125 \cdot \overline{j} = [\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Apl. 2.23

Să se determine forţa exercitată de către ştiftul din C asupra barei ABC (fig. Apl-2.23). Se neglijează greutăţile barelor. Ştiftul B este ataşat solidar la bara ABC şi se reazemă în canalul neted al barei BD.

Rezolvare:

a) Se aplică *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.23.a).

Determinăm mai întîi unghiurile α şi β (fig. Apl-2.23.a), astfel:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{720}{1200 - 600 + 540} = 32,276^\circ \ ; \qquad \beta = \mathrm{arctg}\frac{720}{540} = 53,13^\circ \ .$$

Din aplicarea teoremei solidificării (fig. Apl-2.23.a) se utilizează numai ecuaţia de momente scrisă în raport cu articulaţia E, care are forma (1):

$$G \cdot 1{,}2 + H_A \cdot 1{,}2 - V_A \cdot 2{,}1 = 0 . \qquad (1)$$

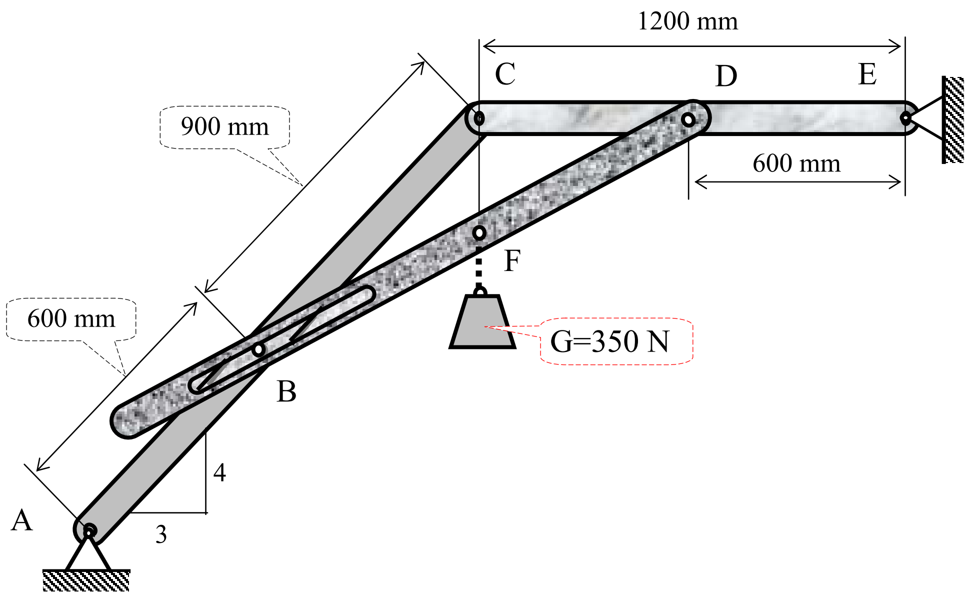


Fig. Apl-2.23

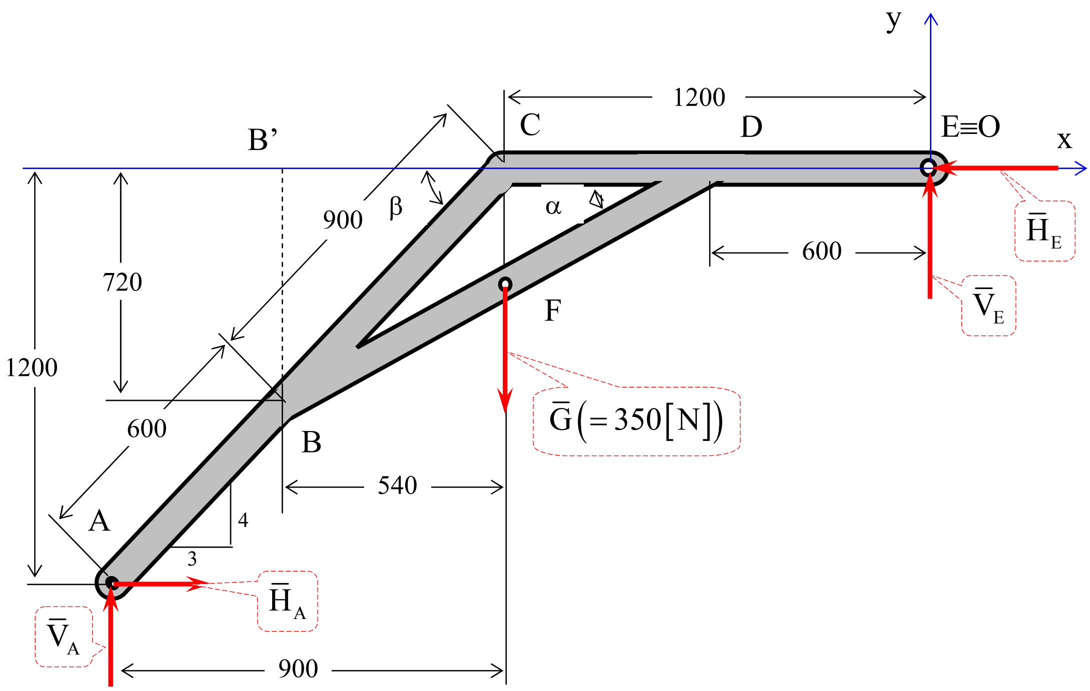


Fig. Apl-2.23.a

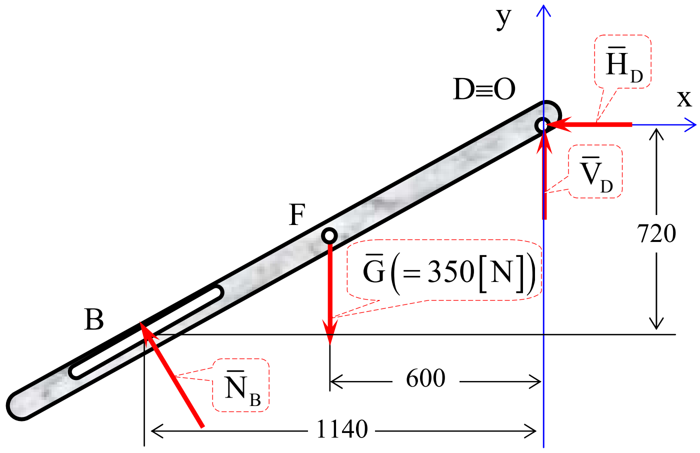


Fig. Apl-2.23.b

Apoi se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara BFD (fig. Apl-2.23.b) şi se utilizează, pentru determinarea reacţiunii din reazemul B (N_B), numai ecuaţia de momente scrisă în raport cu articulaţia cilindrică D, care are forma (2):

$$G\cdot 0{,}6-N_B\cdot 1{,}348=0; \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad N_B=\frac{0{,}6}{1{,}348}\cdot G=\frac{0{,}6}{1{,}348}\cdot 350=155{,}75\,[N].$$

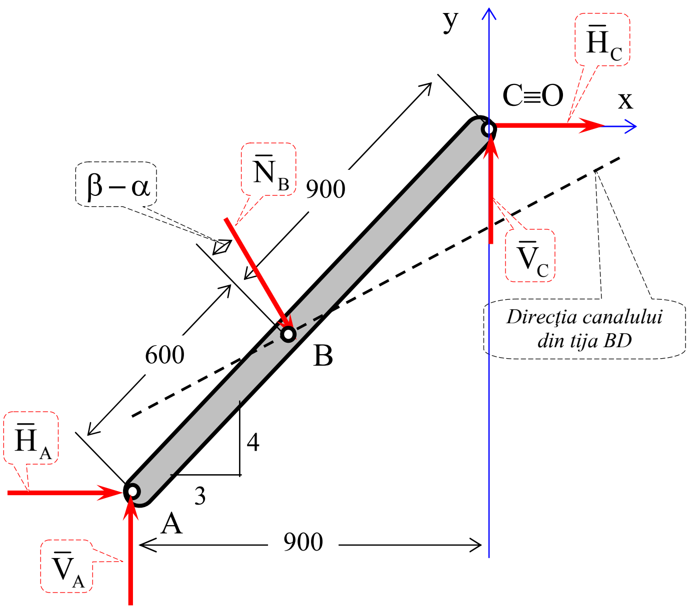


Fig. Apl-2.23.c

Pentru a ajunge la necunoscuta cerută în întrebare, se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara ABC (fig. Apl-2.23.c).

Ecuaţiile de echilibru corespunzătoare, scrise în raport cu un sistem de referinţă cu originea în C, sunt:

$$\begin{cases} H_C+H_A+N_B\cdot\sin\alpha=0,\\ V_C+V_A-N_B\cdot\cos\alpha=0,\\ H_A\cdot 1{,}2+N_B\cdot\cos(\beta-\alpha)\cdot 0{,}9-V_A\cdot 0{,}9=0.\end{cases} \qquad (3)$$

Din diferenţa ecuaţiilor (1) - (3_3) se obţine:

$$1{,}2\cdot G-2{,}1\cdot V_A+0{,}9\cdot V_A-0{,}9\cdot\cos(\beta-\alpha)\cdot N_B=0. \qquad (4)$$

Din ecuaţiile (4) respectiv (1) se obţin mărimile componentelor reacţiunii din articulaţia cilindrică A:

$$V_A = \frac{1}{1,2} \cdot \left[1,2 \cdot 350 - 0,9 \cdot 155,75 \cdot \cos\left(20,85^\circ\right)\right] = 240,84\left[N\right];$$

$$H_A = \frac{1}{1,2} \cdot \left(1,2 \cdot 240,84 - 1,2 \cdot 350\right) = 71,47\left[N\right].$$

Din ecuaţiile (3_1) respectiv (3_2) se obţin mărimile componentelor reacţiunii din articulaţia cilindrică C:

$$H_C = -H_A - N_B \cdot \sin\alpha =$$

$$= -71,47 - 155,75 \cdot \sin 32,28^\circ = -154,64\left[N\right];$$

$$V_C = -V_A + N_B \cdot \cos\alpha =$$

$$= -240,84 + 155,75 \cdot \cos 32,28^\circ = -109,156\left[N\right].$$

Deci, forţa exercitată de către ştiftul din C asupra barei ABC este:

$$\Rightarrow \quad \overline{R}_C = -154,64 \cdot \overline{i} - 109,156 \cdot \overline{j}\left[N\right]. \qquad \blacklozenge$$

Apl. 2.24

Sarcinile $\boldsymbol{G_1}$ şi $\boldsymbol{G_2}$ din figura Apl-2.24 sunt fiecare de câte $1250\left[N\right]$, cu centrele de greutate în $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$. Platforma pe care acestea se află în repaus are greutatea de $800\left[N\right]$ cu centrul de masă în C_3 şi este suportată de către două perechi de bare de forma unei cruci (o pereche - se vede în figură). Neglijând greutăţile perechilor de bare să se determine forţa transmisă de către ştiftul ce conectează aceste două bare în punctul F. Considerăm că jumătate din sarcină este suportată de fiecare pereche de bare (sistemul este simetric).

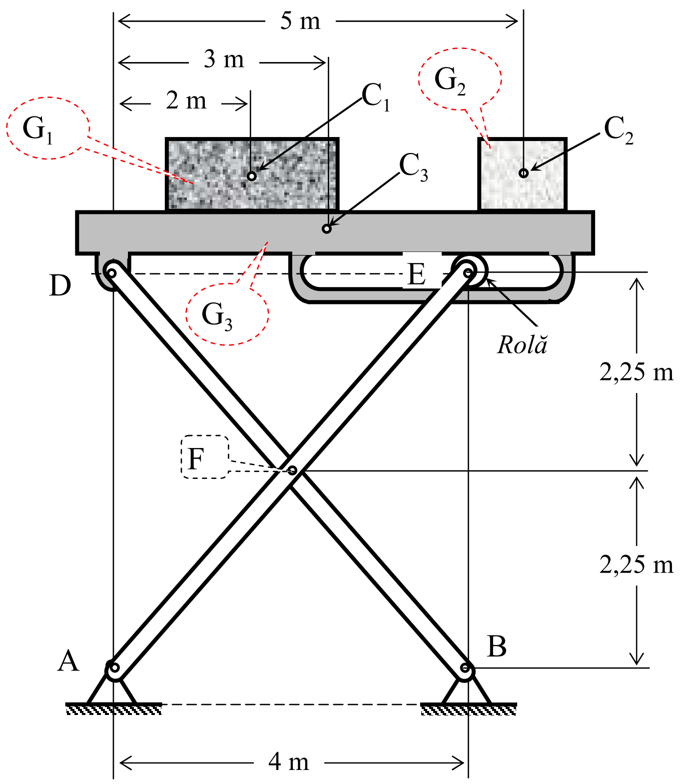


Fig. Apl-2.24

Rezolvare:

Se aplică *teorema*

solidificării pentru întreg sistemul de corpuri (fig. Apl-2.24.a).

Din aplicarea teoremei solidificării, pentru determinarea componentei verticale V_A a reacţiunii din A, se utilizează numai ecuaţia de momente scrisă în raport cu articulaţia cilindrică B, care are forma (1):

$$-V_A \cdot 4 + G_1 \cdot 2 - G_2 \cdot 1 + G_3 \cdot 1 = 0; \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{4} \cdot (G_1 \cdot 2 - G_2 \cdot 1 + G_3 \cdot 1) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1250}{2} \cdot 2 - \frac{1250}{2} \cdot 1 + \frac{800}{2} \cdot 1 \right) = 256{,}25\,[\mathrm{N}].$$

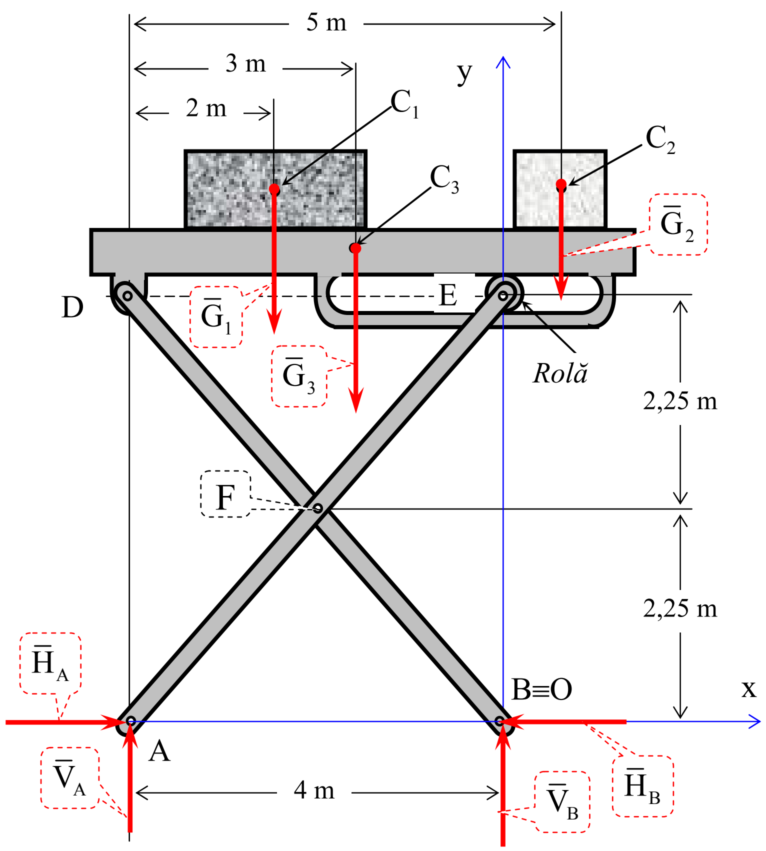


Fig. Apl-2.24.a

Sarcinile G_1, G_2 şi G_3, în relaţia de mai sus, sunt introduse numai pe jumătate deoarece sunt distribuite în raportul 1/2 pe cele două perechi de bare.

Apoi se aplică *teorema echilibrului părţilor (*dublată *de teorema solidificării)* pentru platformă (G_3) şi cele două sarcini egale (G_1 şi G_2) (fig. Apl-2.24.b) şi se utilizează, pentru determinarea reac-ţiunii din reazemul E (N_E), numai ecuaţia de momente scrisă în raport cu articulaţia cilindrică D, care are forma (2):

$$N_E \cdot 4 - G_1 \cdot 2 - G_2 \cdot 5 - G_3 \cdot 3 = 0; \qquad (2)$$

$\Rightarrow$

$$N_E = \frac{1}{4} \cdot (G_1 \cdot 2 + G_2 \cdot 1 + G_3 \cdot 1) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1250}{2} \cdot 7 + \frac{800}{2} \cdot 3 \right) = 1393{,}75\,[\mathrm{N}].$$

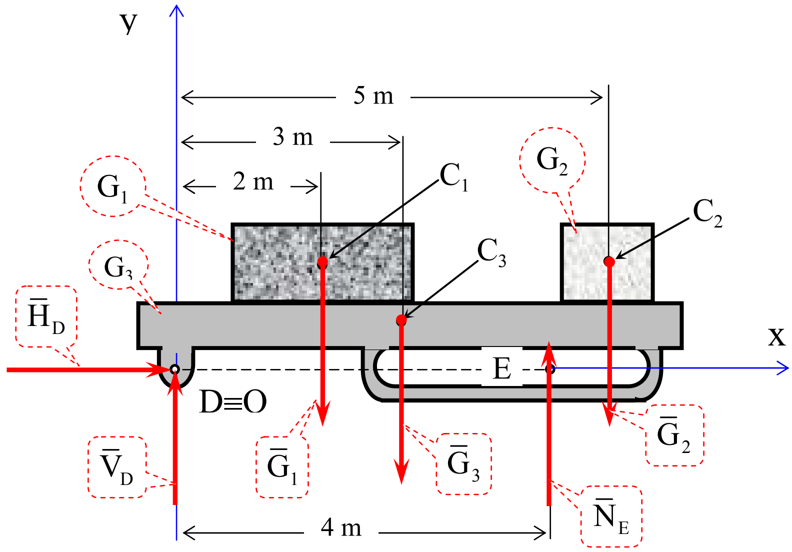


Fig. Apl-2.24.b

Sarcinile G_1, G_2 şi G_3 , în relaţia de mai sus, sunt introduse numai pe jumătate deoarece sunt distribuite în raportul ½ pe cele două perechi de bare. Pentru a ajunge la necunoscuta cerută în întrebare, se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru bara AFE (fig. Apl-2.24.c).

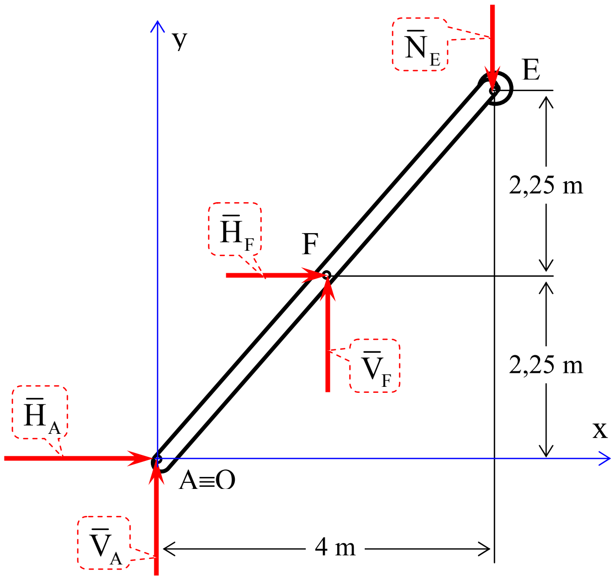


Fig. Apl-2.24.c

Ecuaţiile de echilibru corespunzătoare, scrise în raport cu un sistem de referinţă cu originea în A, sunt:

$$\begin{cases} H_A + H_F = 0, \\ V_A + V_F - N_E = 0, \\ V_F \cdot 2 - H_F \cdot 2{,}25 - N_E \cdot 4 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Din ecuaţiile (3_2) respectiv (3_3) se obţin mărimile componentelor reacţiunii din articulaţia cilindrică F:

$$\Rightarrow V_F = N_E - V_A = $$
$$= 1393{,}75 - 256{,}25 = 1137{,}5\,[\mathrm{N}]$$

$$\Rightarrow H_F = \frac{1}{2{,}25} \cdot (V_F \cdot 2 - N_E \cdot 4) =$$
$$= \frac{1}{2{,}25} \cdot (1137{,}5 \cdot 2 - 1393{,}75 \cdot 4) = 1466{,}67\,[\mathrm{N}].$$

Deci, forţa transmisă de către ştiftul ce conectează cele două bare în punctul F, este:

$$\Rightarrow R_F = \sqrt{(H_F)^2 + (V_F)^2} = \sqrt{(1466{,}67)^2 + (1137{,}5)^2} = 1856\,[\mathrm{N}].\blacklozenge$$

Apl. 2.25

Sistemul de corpuri din figura Apl-2.25 este constituit din bara rectilinie AC, bara curbă CD (sfert de cerc) şi scripetele ***S***. Stabiliţi dacă sistemul de bare AC şi CD este în echilibru prin lipsa blocului ***B***. În caz contrar să se determine greutatea minimă a blocului pentru menţinerea echilibrului întregului sistem de corpuri. Considerăm că forţele exercitate aspra barei CD de către planul orizontal şi blocul ***B*** sunt concurente în acelaşi punct D. Desemenea, să se determine forţa exercitată de către ştiftul C asupra barei AC în cazul echilibrului sistemului.

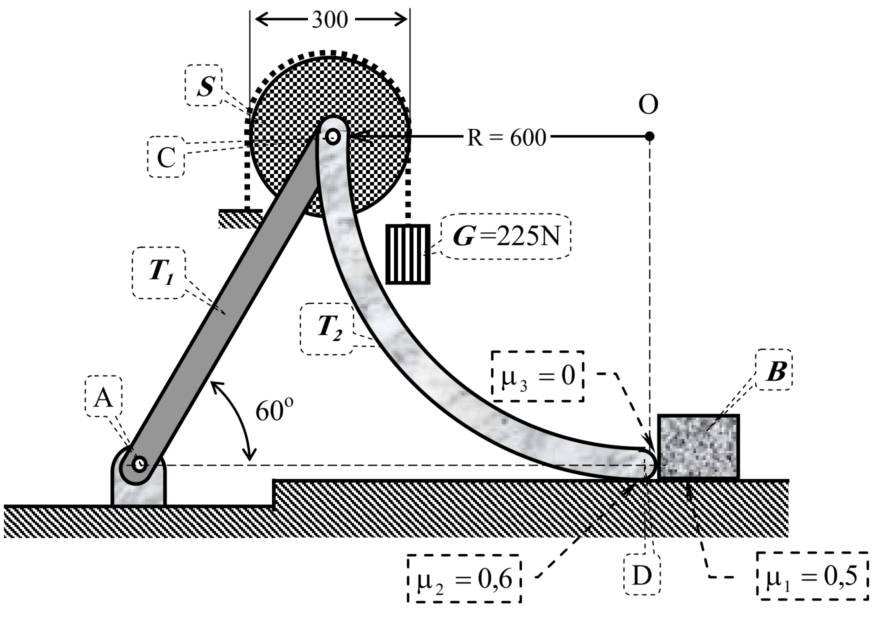


Fig. Apl-2.25

Rezolvare:

*Este în echilibru sistemul de bare AC şi CD prin lipsa blocului **B** ?*

Se determină forţa $R_C^{'}$ (fig. Apl-2.25.c) de interacţiune dintre scripetele ***S*** şi ştiftul C de conexiune a barelor AC şi CD:

$$R_C^{'} = G + S = 2 \cdot G = 2 \cdot 225 = 450\,[N].$$

Se utilizează *teorema solidificării* pentru întreg sistemul de corpuri introducând forţa $R_C^{'}$ în locul scripetelui (fig. Apl-2.25.a).

Ecuaţiile de echilibru pentru întreg sistemul de corpuri solidificat (fig. Apl-2.25.a), în sistemul de referinţă cartezian cu originea în Q, sunt:

$$\begin{cases} H_2^a - T_2^a = 0, \\ V_2^a + N_2^a - R_C^{'} = 0, \\ N_2^a \cdot 0{,}9465 - R_C^{'} \cdot 0{,}3465 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

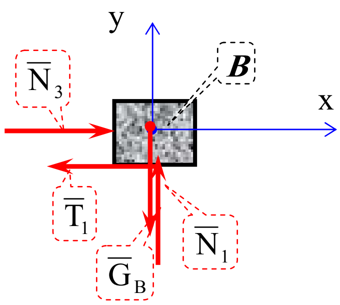


Fig. Apl-2.25.b

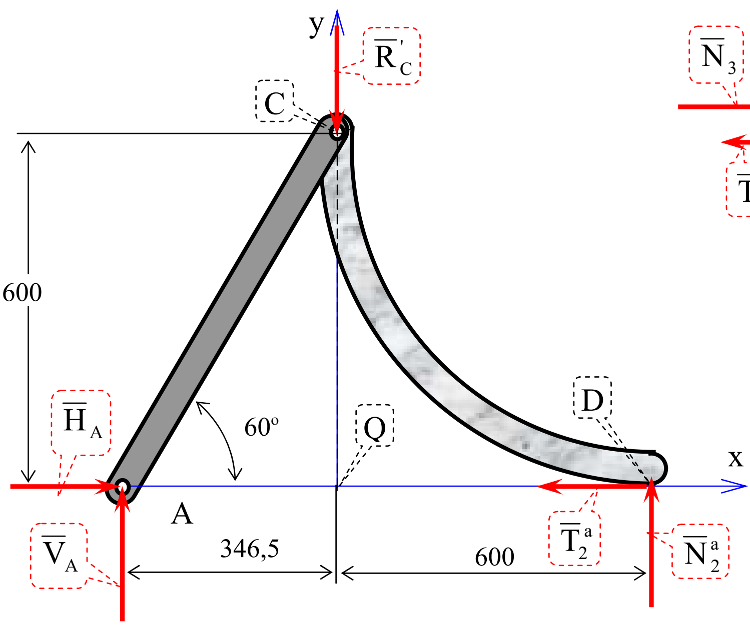


Fig. Apl-2.25.a

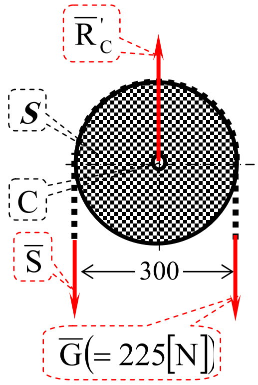


Fig. Apl-2.25.c

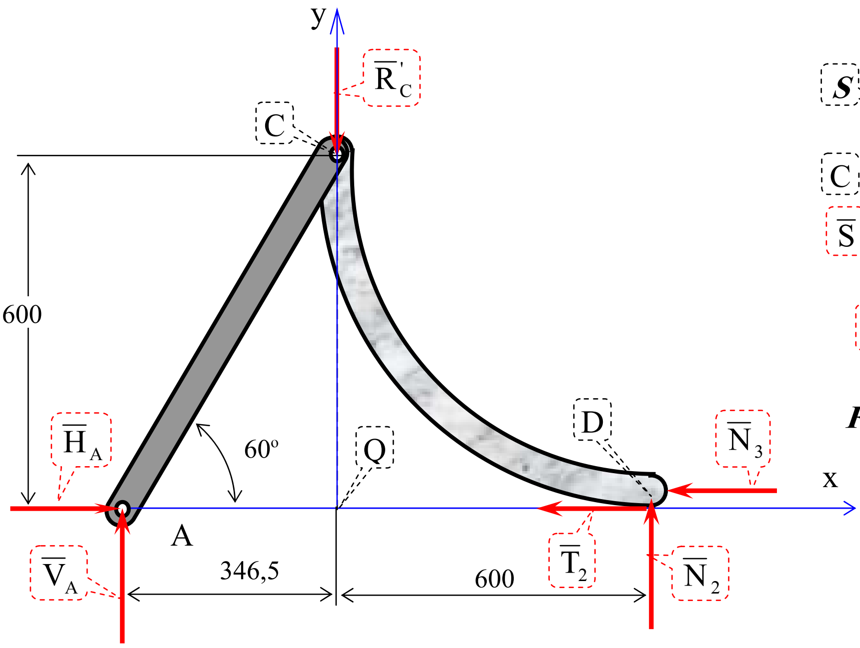


Fig. Apl-2.25.d

Din ecuaţia (1_3)

$$\Rightarrow \quad N_2^a = \frac{0{,}3465}{0{,}9465} \cdot R_C^{'} = \frac{0{,}3465}{0{,}9465} \cdot 450 = 164{,}74\,[N].$$

Forţa de frecare:

$$T_2^a = \mu_2 \cdot N_2^a. \qquad (2)$$

Din ecuaţia de echilibru (numai ecuaţia de momente în raport cu articulaţia cilindrică C) a barei AC – considerată eliberată de legături conform cu teorema echilibrului părţilor, rezultă:

$$H_A^a \cdot 0.6 - V_A^a \cdot 0.3465 = 0,$$

$$\Rightarrow V_A^a = \frac{0,6}{0,3465} \cdot H_A^a. \qquad (3)$$

Cu relaţia (3) înlocuită în ecuaţia (1_2) obţinem:

$$\frac{0,6}{0,3465} \cdot H_A^a + N_2^a - R_C^{'} = 0;$$

$$\Rightarrow H_A^a = \frac{0,3465}{0,6} \cdot \left(R_C^{'} - N_2^a\right) = \frac{0,3465}{0,6} \cdot (450 - 164,74) = 164,74\,[N].$$

Din ecuaţia (1_1) se obţine valoarea forţei de frecare - T_{2nec}^a - necesară menţinerii echilibrului întregului sistem de corpuri, adică:

$$T_{2nec}^a = H_2^a = 164,74\,[N].$$

Din ecuaţia (2) se obţine valoarea maximă a forţei de frecare- $T_{2\max}^a$, adică:

$$T_{2\max}^a = \mu_2 \cdot N_2^a = 0,6 \cdot 164,74 = 98,84\,[N].$$

Comparând cele două valori ale forţei de frecare, adică:

$$T_{2nec}^a = 164,74\,[N] \quad > \quad T_{2\max}^a = 98,84\,[N],$$

rezultă că pentru echilibrul sistemului este necesară existenţa blocului ***B***.

În continuare se aplică *teorema echilibrului părţilor* pentru subsistemul constituit din bara rectilinie AC şi bara curbă CD (sfert de cerc) ca în figura (fig. Apl-2.25.d) la care se adaugă *teorema echilibrului părţilor* pentru subsistemul constituit numai din blocul ***B*** (fig. Apl-2.25.b).

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul constituit din bara rectilinie AC şi bara curbă CD (sfert de cerc) ca în figura (fig. Apl-2.25.d) sunt:

$$\begin{cases} H_A - T_2 - N_3 = 0, \\ N_2 + V_A - R_C^{'} = 0, \\ N_2 \cdot 0,6 - V_A \cdot 0,3465 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Ecuaţiile de echilibru pentru subsistemul constituit numai din blocul ***B*** (fig. Apl-2.25.b) sunt:

$$\begin{cases} N_3 - T_1 = 0, \\ N_1 - G_B = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Pentru echilibrul la limită există tendinţă de mişcare atât între capătul D al barei curbe şi planul orizontal cât şi între blocul ***B*** şi planul orizontal, astfel că forţele de frecare corespunzătoare sunt:

$$\begin{cases} T_1 = \mu_1 \cdot N_1, \\ T_2 = \mu_2 \cdot N_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Direcţia reacţiunii din articulaţia cilindrică A are direcţia tijei (60^o cu orizontala) deoarece între A şi C este legătură cu tijă rigidă. Astfel, între componentele H_A şi V_A este relaţia:

$$V_A = H_A \cdot tg60^o . \qquad (7)$$

Introducând relaţiile forţelor de frecare (6) şi relaţia (7) în relaţiile (4) şi (5) se obţine sistemul de cinci ecuaţii de forma (8), adică:

$$\begin{cases} H_A - \mu_2 \cdot N_2 - N_3 = 0, \\ N_2 + H_A \cdot tg60^o - R_C^{'} = 0, \\ N_2 \cdot 0{,}6 - H_A \cdot tg60^o \cdot 0{,}3465 = 0, \\ N_3 - \mu_1 \cdot N_1 = 0, \\ N_1 - G_B = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Rezolvarea sistemului (8) se face cu ajutorul procedurilor din MATHCAD. În tabel sunt introduşi coeficienţii necunoscutelor sistemului şi termenii liberi.

	N_1	N_2	N_3	H_A	G_B	Membr. 2
1.	0	-0,6	-1	1	0	0
2.	0	1	0	$\sqrt{3}$	0	450
3.	0	0,6	0	$-\sqrt{3}$x0,3465	0	0
4.	-0,5	0	1	0	0	0
5.	1	0	0	0	-1	0
REZ.	131,705 [N]	164,739 [N]	65,853 [N]	164,696 [N]	131,705 [N]	-

Enter a non-singular matrix corresponding to the n equations in n unknowns:

Enter a vector of n constants:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -0.6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & -\sqrt{3}\cdot 0.3465 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 450 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$soln := \mathrm{lsolve}(M, v) \qquad soln = \begin{pmatrix} 131.705 \\ 164.739 \\ 65.853 \\ 164.696 \\ 131.705 \end{pmatrix} \qquad \text{"elem sol"} := \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ H_A \\ G_B \end{pmatrix}$$

$$H_A := 164.696 \qquad V_A := H_A \cdot \sqrt{3} \qquad R_A := \sqrt{(H_A)^2 + (V_A)^2} \qquad R_A = 329.392 \ \ \mathrm{N}$$

Deci, greutatea minimă a blocului ***B*** este:

$$G_{B\,min} = 131{,}705\,[\mathrm{N}], \qquad \blacklozenge$$

iar forţa exercitată de către ştiftul C asupra barei AC este:

$$R_C = R_A = 329{,}392\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Apl. 2.26

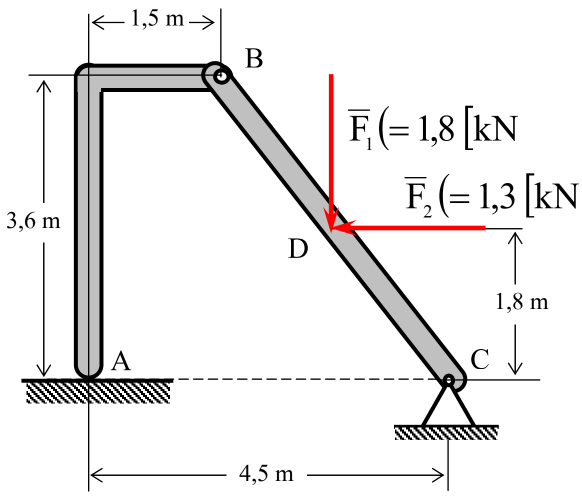


Fig. Apl-2.26

Sistemul de bare din figura Apl-2.26 este menţinut în poziţia indicată prin intermediul articulaţilor B şi C, şi a reazemului simplu cu frecare din A. Să se determine:

a) valoarea minimă a coeficientului de frecare din A care poate asigura echilibrul sistemului;

b) forţele exercitate de către ştifturile articulaţiilor B şi C asupra barei BC.

Răspuns:

a) $\mu = 0{,}417$;

b) $\overline{R}_A = 467 \cdot \overline{i} + 1.120 \cdot \overline{j}\,[\mathrm{N}]$; $\overline{R}_C = 833 \cdot \overline{i} + 680 \cdot \overline{j}\,[\mathrm{N}]$.

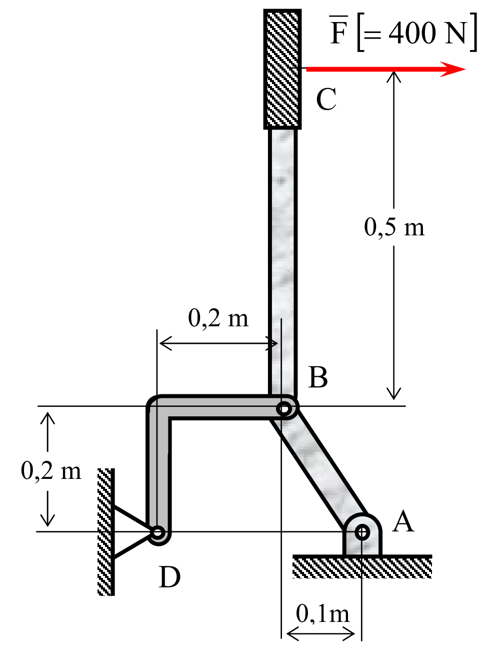


Fig. Apl-2.27

Apl. 2.27

Pârghia ABC este articulată în punctul A şi conectată la sistemul fix în D prin intermediul barei BD în formă de L (fig. Apl-2.27). Dacă se neglijează greutăţile proprii ale barelor şi asupra mânerului levierului în C se acţionează cu forţa $F = 400\,[N]$, să se determine forţa exercitată asupra ştiftului din A de către levier.

Răspuns:
$R_A = 1074{,}976\,[N]$;
$\theta = 60{,}255^{\circ}$.

Apl. 2.28

Sistemul de bare articulate din fig. Apl-2.28 este supus acţiunii forţei orizontale de intensitate 150N. Să se determine forţa ce acţionează asupra bolţului din A şi forţa cu care sistemul de bare acţionează prin punctul C asupra planului înclinat.

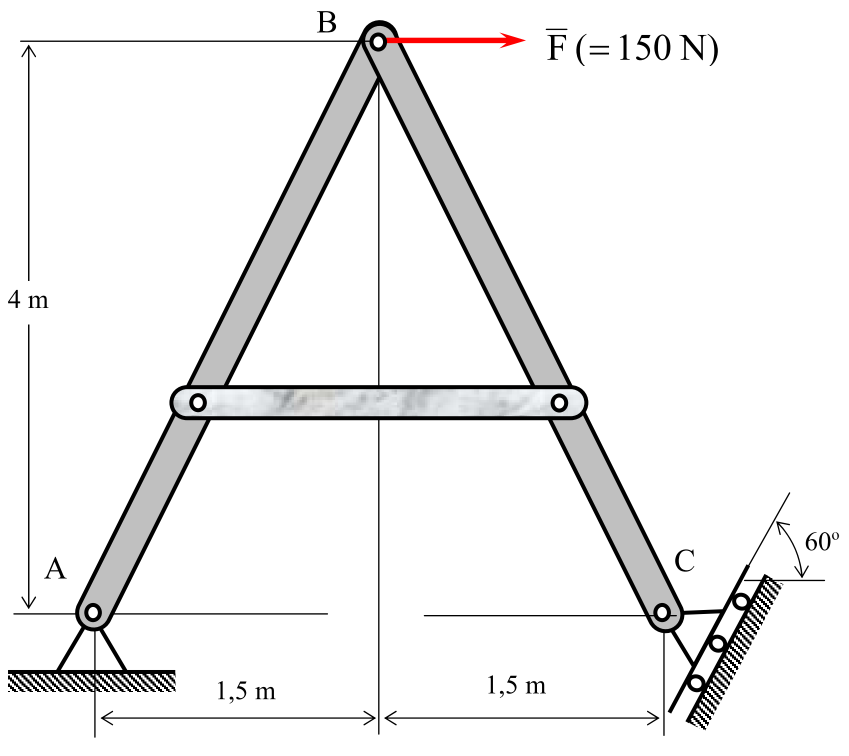


Fig. Apl-2.28

Răspuns: $R_A = 280{,}32\ [N]$; $N_C = 400\ [N]$.

Apl. 2.29

Să se determine reacţiunile din A şi B (articulaţii cilindrice) dacă asupra barei curbe AD acţionează un cuplu $M = 80\,[N \cdot m]$ (fig. Apl-2.29). Fiecare bară are forma de sfert de cerc şi ambele au greutăţi neglijabile.

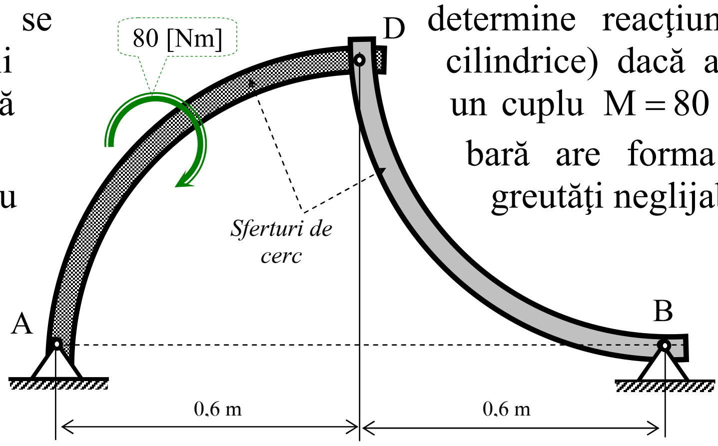


Fig. Apl-2.29

Răspuns:

$R_{Ax} = 66{,}67\,[N] \rightarrow$; $R_{Ay} = 66{,}67\,[N] \downarrow$; $R_B = 94{,}28\,[N]$.

Apl. 2.30

În figura Apl-2.30 discul ***D*** este articulat cilindric în centrul său A la bara omogenă ***B*** . Masele corpurilor sunt: $m_D = 150\,[kg]$ pentru discul ***D*** şi $m_B = 200\,[kg]$ pentru bara omogenă ***B.*** În ambele puncte de rezemare se

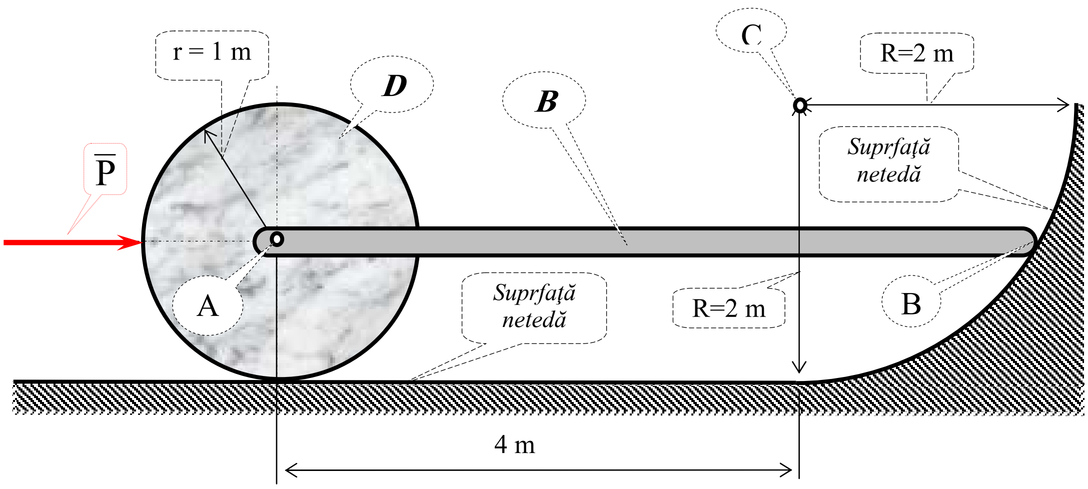
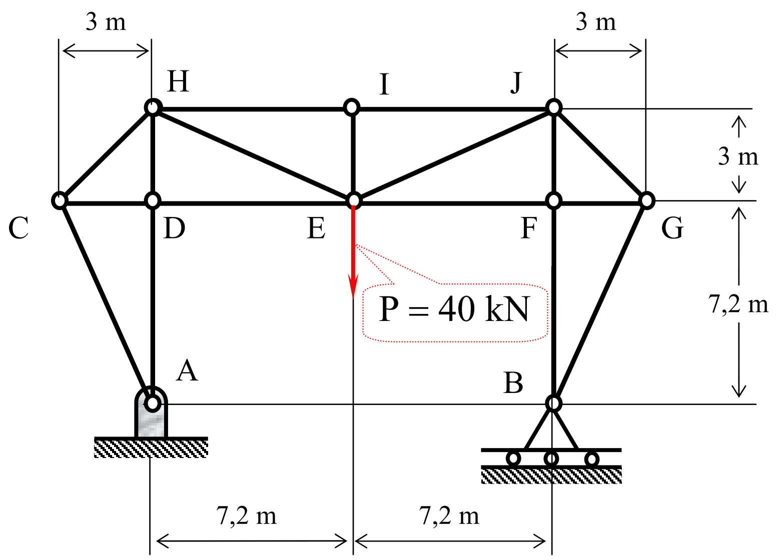


Fig. Apl-2.30

neglijează frecarea cu planul orizontal (discul) respectiv cu suprafaţa cilindrică (bara omogenă). Să se determine mărimea forţei orizontale, P, necesară menţinerii în echilibru a sistemului corpurilor ***D*** şi ***B***.

Răspuns: $P = 1698{,}46\,[N]$.

Apl. 2.31



Grinda cu zăbrele din figura Apl-2.31 este încărcată cu sarcina concentrată $P = 40\,[\mathrm{kN}]$ aplicată în punctul (nodul) E.

Să se determine eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele din figură.

Fig. Apl-2.31

Rezolvare

Grinda cu zăbrele este static determinată deoarece este îndeplinită condiţia:

$$b = 2 \cdot n - 3, \quad \Rightarrow \quad 17 = 2 \cdot 10 - 3.$$

Unghiurile din figura 5.1.a sunt:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7{,}2} = 22{,}62^{\circ}; \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{3} = 45^{\circ}.$$

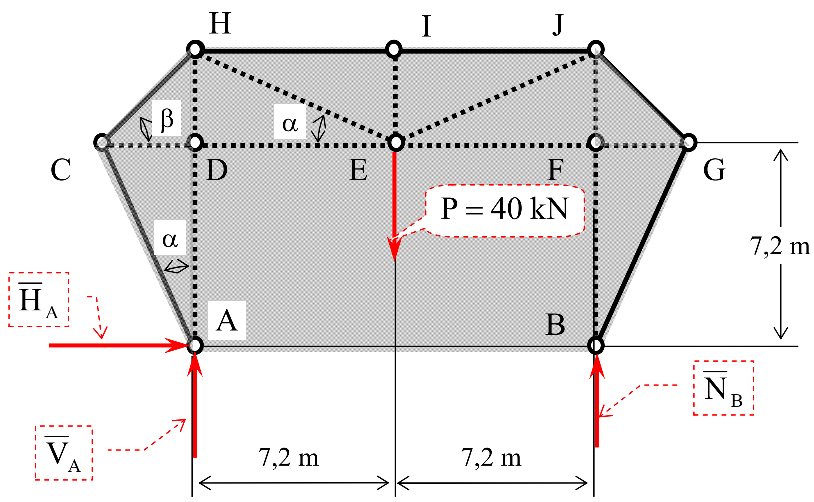


Fig. Apl-2.31.a

Se determină reacţiunile utilizând teorema solidificării pentru întreaga grindă cu zăbrele (fig. Apl-2.31.a):

$$\begin{cases} H_A = 0, \\ N_B + V_A - P = 0, \\ N_B \cdot 14{,}4 - P \cdot 7{,}2 = 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad H_A = 0;$$
$$N_B = \frac{1}{2} \cdot P = \frac{1}{2} \cdot 40\,[\mathrm{kN}] = 2 \cdot 10^4\,[\mathrm{N}];$$
$$V_A = P - N_B = 4 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^4\,[\mathrm{N}].$$

Grinda cu zăbrele fiind simetrică se determină eforturile numai din barele părţii din stânga planului de simetrie vertical ce conţine şi bara IE şi se atribuie şi celor simetrice astfel: $S_{AC} = S_{BG}$, $S_{AD} = S_{BF}$, $S_{CD} = S_{FG}$, $S_{CH} = S_{JG}$, $S_{DE} = S_{EF}$ şi $S_{HI} = S_{IJ}$.

Pentru partea din stânga planului de simetrie vertical se determină eforturile din barele grinzii cu zăbrele aplicând metoda izolării nodurilor pornind de la nodul A şi continuând, în ordinea următoare, cu nodurile C, H şi I.

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul **A*** (fig. Apl-2.31.b):

$$\begin{cases} H_A - S_{AC} \cdot \sin\alpha = 0, \\ V_A + S_{AD} + S_{AC} \cdot \cos\alpha = 0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow S_{AC} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot H_A = 0,$$
$$S_{AD} = -V_A = -2 \cdot 10^4\,[\mathrm{N}]. \qquad \blacklozenge$$

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul **C*** (fig. Apl-2.31.c):

$$\begin{cases} S_{CH} \cdot \cos\beta + S_{CD} + S_{AC} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0, \\ S_{CH} \cdot \sin\beta - S_{AC} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad S_{CH} = 0;$$
$$S_{CD} = 0. \qquad \blacklozenge$$

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul **D*** (fig. Apl-2.31.d):

$$\begin{cases} S_{DE} - S_{CD} = 0, \\ S_{HD} - S_{AD} = 0; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow S_{DE} = S_{CD} = 0;$$
$$S_{HD} = S_{AD} = -2 \cdot 10^4\ [N].$$ ♦

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul* ***H*** (fig. Apl-2.31.e):

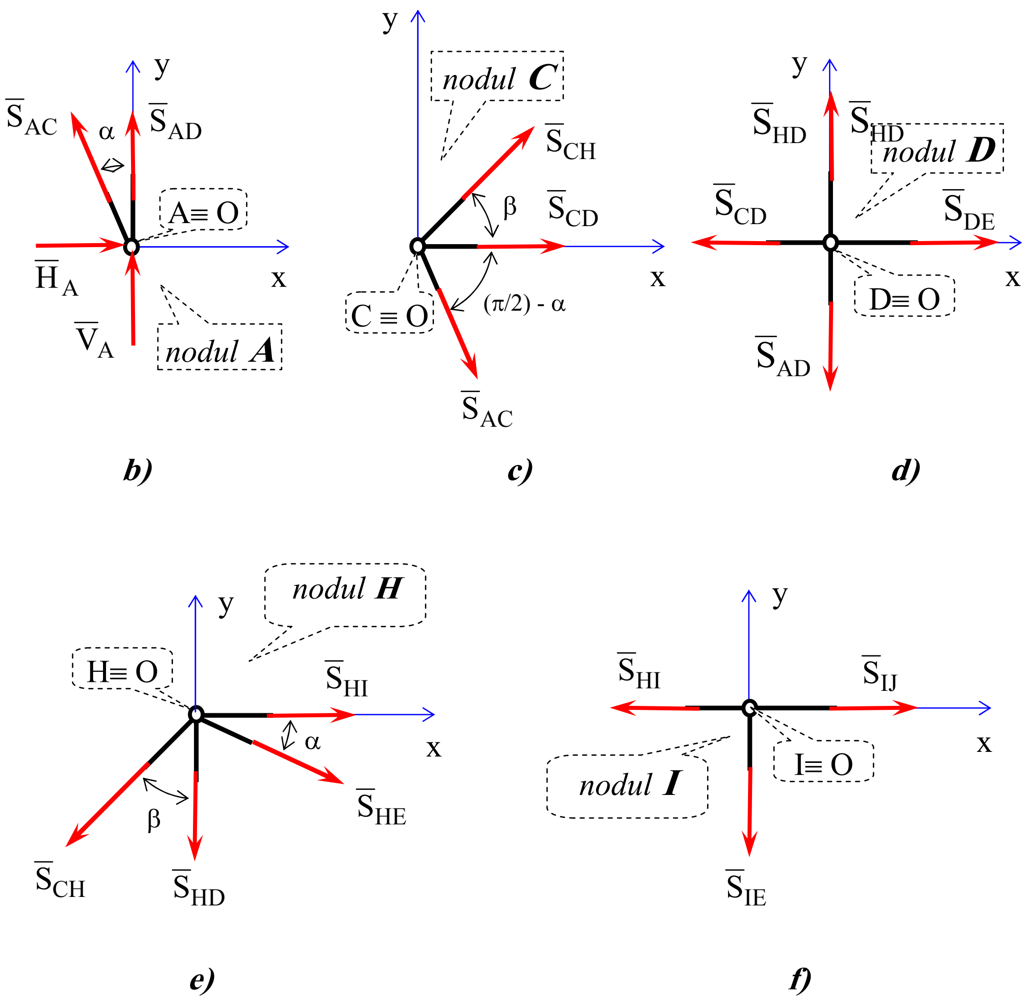


Fig. Apl-2.31. b, c, d, e, f

$$\begin{cases} S_{HI} + S_{HE} \cdot \cos\alpha - S_{CH} \cdot \sin\beta = 0, \\ -S_{HE} \cdot \sin\alpha - S_{HD} - S_{CH} \cdot \cos\beta = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\Rightarrow S_{HE} = -\frac{1}{\sin\alpha} \cdot S_{HD} = -\frac{(-2 \cdot 10^4)}{\sin 22{,}62^\circ} \cdot = 5{,}2 \cdot 10^4\ [N];$$ ♦

$$S_{HI} = -S_{HE} \cdot \cos\alpha = -(5{,}2 \cdot 10^4) \cdot \cos 22{,}62^\circ = -4{,}8 \cdot 10^4\ [N].$$ ♦

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul* ***I*** (fig. Apl-2.31.f):

$$\begin{cases} S_{IJ} - S_{HI} = 0, \\ S_{IE} = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad S_{IE} = 0 \quad \text{şi} \quad S_{IJ} = S_{HI} = -4{,}8 \cdot 10^4\ [N]. \qquad \blacklozenge$$

În figura 5.1.g (notaţia nodurilor nu coincide-alegerea este facută prin program; eforturile se echivalează comparând cu notaţiile din figura cu datele

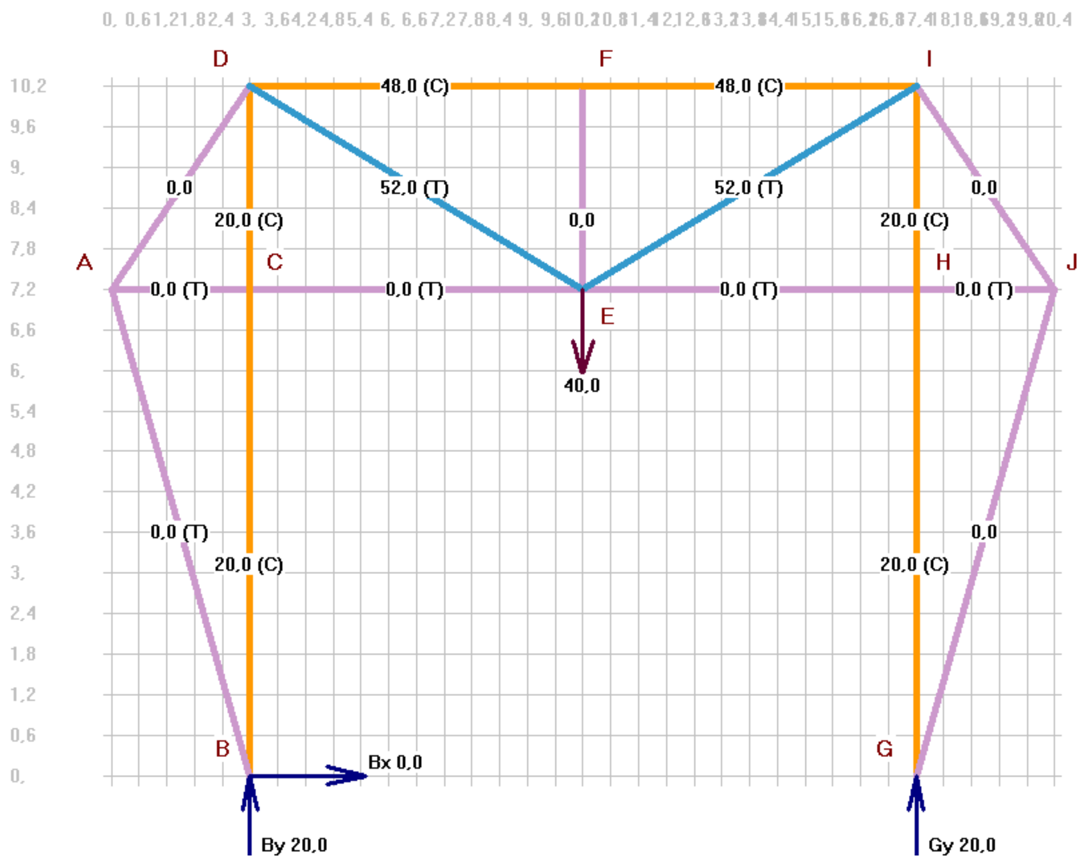


Fig. Apl-2.31.g *(reacţiunile şi eforturile sunt indicate în kN)*

iniţiale) este reprezentat grafic rezultatul prelucrării datelor problemei cu ajutorul modulului “Truss Analysis” al programului MDSolids 3.0. Observaţie: toate forţele din figură (încărcare, reacţiuni şi eforturi din bare) sunt date în kN.

Deci se verifică rezultatele obţinute prin cele trei metode.

Apl. 2.32

Grinda cu zăbrele din figura Apl-2.32 este încărcată cu sarcina distribuită pe bara rezemată pe grindă prin intermediul celor trei role din punctele C, D şi F, de intensitate $p = 4\,[\mathrm{kN/m}]$. Să se determine eforturile în barele CB, CD, DB, BA şi AC ale grinzii cu zăbrele din figură.

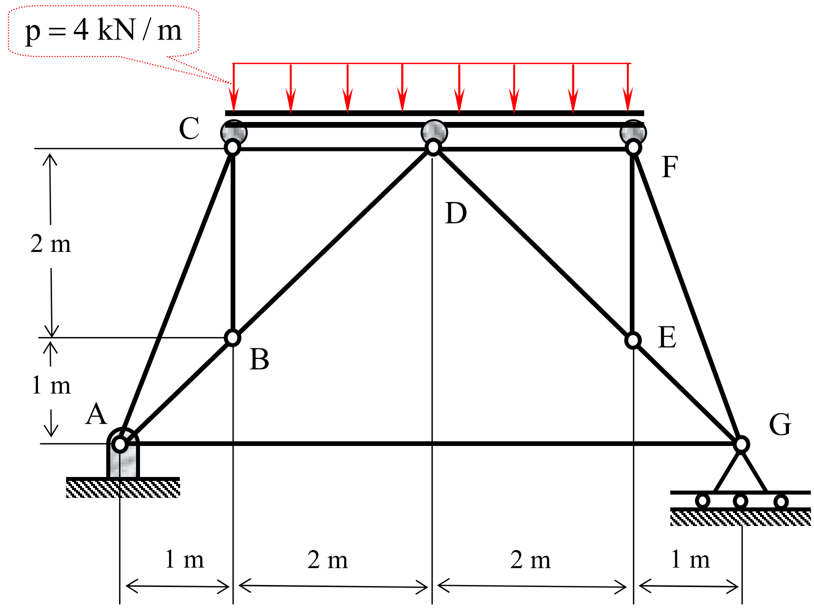


Fig. Apl-2.32

Rezolvare:

Metoda Ia

Grinda cu zăbrele este static determinată deoarece este îndeplinită condiţia:

$$b = 2 \cdot n - 3,$$
$$\Rightarrow 11 = 2 \cdot 7 - 3.$$

Unghiurile din figura Apl-2.32.a sunt:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{3} = 45^{\circ};$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{1} = 71{,}56^{\circ}$$

.

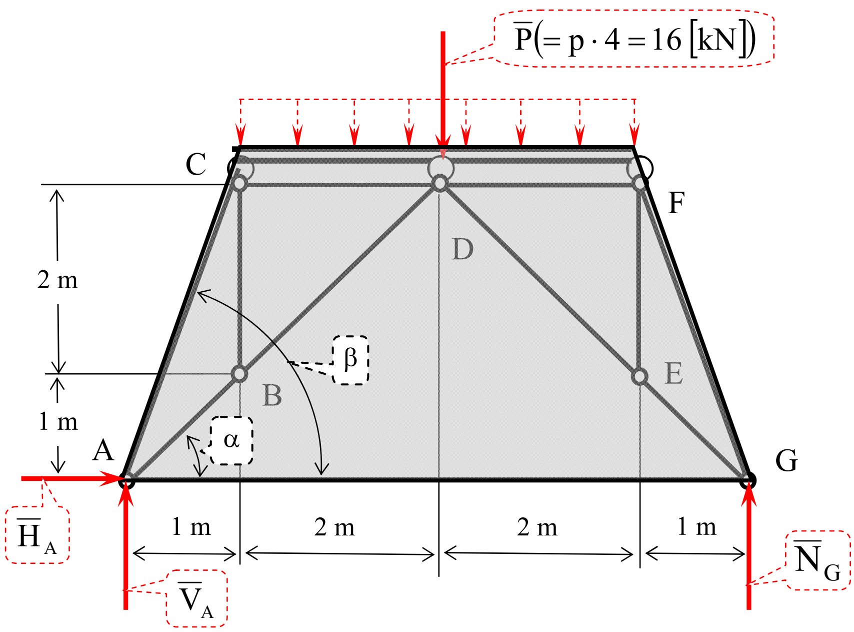
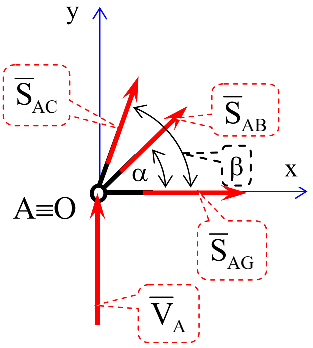


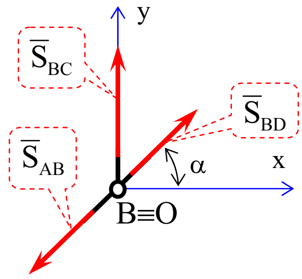
Fig. Apl-2.32.a

Se determină reacţiunile exterioare utilizând teorema solidificării pentru întreaga grindă cu zăbrele (fig. Apl-2.32.a):

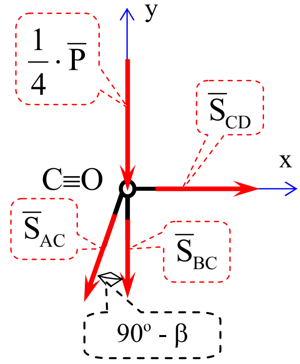
$$\begin{cases} H_A = 0, \\ N_G + V_A - P = 0, \\ N_G \cdot 6 - P \cdot 3 = 0; \end{cases} \qquad (1)$$



b)



c)



d)

Fig. Apl-2.32.b,c,d

$$\Rightarrow \quad H_A = 0;$$

$$N_G = \frac{3}{6}\cdot P = \frac{1}{2}\cdot 16\,[\text{kN}] = 8\cdot 10^3\,[\text{N}];$$

$$V_A = P - N_G = 16\cdot 10^3 - 8\cdot 10^3 = 8\cdot 10^3\,[\text{N}].$$

Grinda cu zăbrele fiind simetrică se determină eforturile numai din barele părţii din stânga planului de simetrie vertical ce conţine şi nodul D şi se atribuie şi celor simetrice astfel: $S_{AC} = S_{GF}$, $S_{AB} = S_{EG}$, $S_{CB} = S_{EF}$, $S_{CD} = S_{DF}$ şi $S_{DB} = S_{ED}$.

Pentru partea din stânga planului de simetrie vertical se determină eforturile din barele grinzii cu zăbrele aplicând *metoda izolării nodurilor* pornind de la nodul A şi continuând, în ordinea următoare, cu nodurile B şi C.

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul **A*** (fig. Apl-2.32.b):

$$\begin{cases} S_{AG} + S_{AC}\cdot\cos\beta + S_{AB}\cdot\cos\alpha = 0, \\ V_A + S_{AB}\cdot\sin\alpha + S_{AC}\cdot\sin\beta = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul **B*** (fig. Apl-2.32.c):

$$\begin{cases} S_{DB}\cdot\cos\alpha - S_{AB}\cdot\cos\alpha = 0, \\ S_{BC} - S_{AB}\cdot\sin\alpha + S_{DB}\cdot\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ecuaţiile de echilibru pentru *nodul **C*** (fig. Apl-2.32.d):

$$\begin{cases} S_{CD} - S_{AC}\cdot\sin\left(90^\circ - \beta\right) = 0, \\ -P/4 - S_{BC} - S_{AC}\cdot\cos\left(90^\circ - \beta\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Rezolvarea sistemului constituit din grupurile de ecuaţii de echilibru corespunzătoare celor trei noduri - rel. (2), (3) şi (4), având 6 ecuaţii şi 6 necunoscute, se face cu ajutorul procedurilor din MATHCAD. În tabel sunt introduşi coeficienţii necunoscutelor sistemului şi termenii liberi.

Nec. → *Nr. ec.* ↓	S_{AG}	S_{AC}	S_{AB}	S_{BC}	S_{DB}	S_{CD}	*Term. liber*
2_1	1	cosβ	cosα	0	0	0	0
2_2	0	sinβ	sinα	0	0	0	$-V_A$
3_1	0	0	-cosα	0	cosα	0	0
3_2	0	0	-sinα	1	sinα	0	0
4_1	0	-sin(90°-β)	0	0	0	1	0
4_2	0	cos(90°-β)	0	1	0	0	-P/4

$V_A := 8\cdot 10^3 N \quad P := 16\cdot 10^3 N \quad \alpha := \mathrm{atan}\left(\frac{3}{3}\right) \quad \alpha = 45\,deg \quad \beta := \mathrm{atan}\left(\frac{3}{1}\right) \quad \beta = 71.565de$

Enter a non-singular matrix corresponding to n equations in n unknowns:

Enter a vector of n constants

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \cos(\beta) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(90deg-\beta) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(90deg-\beta) & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ -V_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-P}{4} \end{pmatrix}$$

$soln := \mathrm{lsolve}(M, v)$

Solution:

$$soln = \begin{pmatrix} 5.333\times 10^{3} \\ -4.216\times 10^{3} \\ -5.657\times 10^{3} \\ -7.461\times 10^{-14} \\ -5.657\times 10^{3} \\ -1.333\times 10^{3} \end{pmatrix} N \qquad soln := \begin{pmatrix} S_{AG} \\ S_{AC} \\ S_{AB} \\ S_{BC} \\ S_{DB} \\ S_{CD} \end{pmatrix}$$

Metoda II^a

(şi cu scop de verificare al rezultatelor obţinute prin metoda I^a)

Se determină eforturile din barele AG, DB şi CD ale grinzii cu zăbrele aplicând *metoda secţiunilor* (fig. Apl-2.32.e):

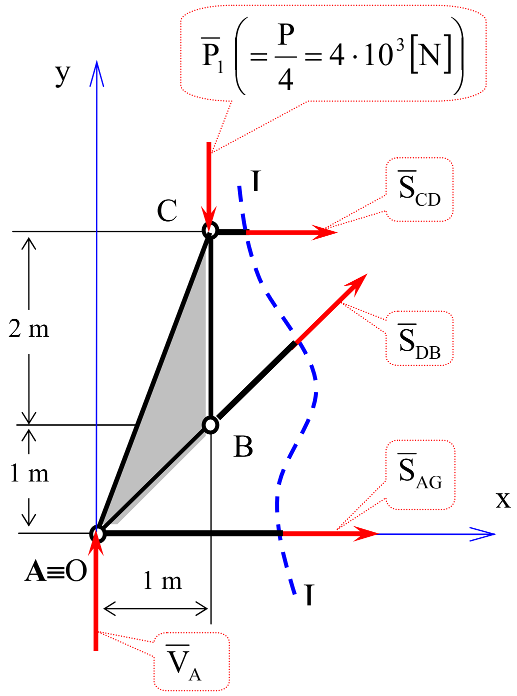


Fig. Apl-2.32.e

$$\begin{cases} S_{AG}+S_{CD}+S_{DB}\cdot\cos\alpha=0, \\ V_A+S_{DB}\cdot\sin\alpha-\frac{P}{4}=0, \\ S_{CD}\cdot(1+2)+\frac{P}{4}\cdot1=0. \end{cases} \qquad (5)$$

din ecuaţia (5_2)

$$\Rightarrow$$

$$S_{DB}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left(\frac{P}{4}-V_A\right)= \\ =\frac{1}{\sin45^o}\cdot\left(\frac{16.10^3}{4}-8.10^3\right)= \\ =-5{,}657\cdot10^3\,[N]; \qquad \blacklozenge$$

din ecuaţia (5_3)

$$S_{CD}=-\frac{P}{12}=-\frac{1{,}6\cdot10^4}{12}=-1{,}333\cdot10^3\,[N]; \qquad \blacklozenge$$

din ecuaţia (5_1)

$$S_{AG}=-S_{CD}-S_{DB}\cdot\cos\alpha= \\ =-\left(-1{,}333\cdot10^3\right)-\left(-4\cdot10^3\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5{,}333\cdot10^3\,[N]. \qquad \blacklozenge$$

Pentru determinarea eforturilor din barele AC, CD şi AD se aplică *metoda izolării nodurilor* pentru nodurile A şi respectiv D (fig. Apl-2.32.b şi c), ecuaţiile (2) şi (3), din care rezultă direct (numai două eforturi necunoscute în fiecare grup de câte două ecuaţii) eforturile necunoscute:

din ecuaţia (2)

$$\Rightarrow S_{AC} = \frac{S_{AG} \cdot \sin\alpha - V_A \cdot \cos\alpha}{\sin\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{S_{AG} \cdot \sin 45^o - V_A \cdot \cos 45^o}{\sin(\beta - \alpha)} =$$

$$= \frac{\left(5{,}333 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\left(71{,}56^o - 45^o\right)} = -4{,}217 \cdot 10^3\ [N]; \quad \blacklozenge$$

din ecuaţia (3_1)

$$\Rightarrow S_{AB} = S_{DB} = -5{,}657 \cdot 10^3\ [N]; \quad \blacklozenge$$

din ecuaţia (3_2)

$$\Rightarrow S_{BC} = S_{AB} \cdot \sin\alpha - S_{DB} \cdot \sin\alpha = 0. \quad \blacklozenge$$

În figura Apl-2.32.f este reprezentat grafic rezultatul prelucrării datelor

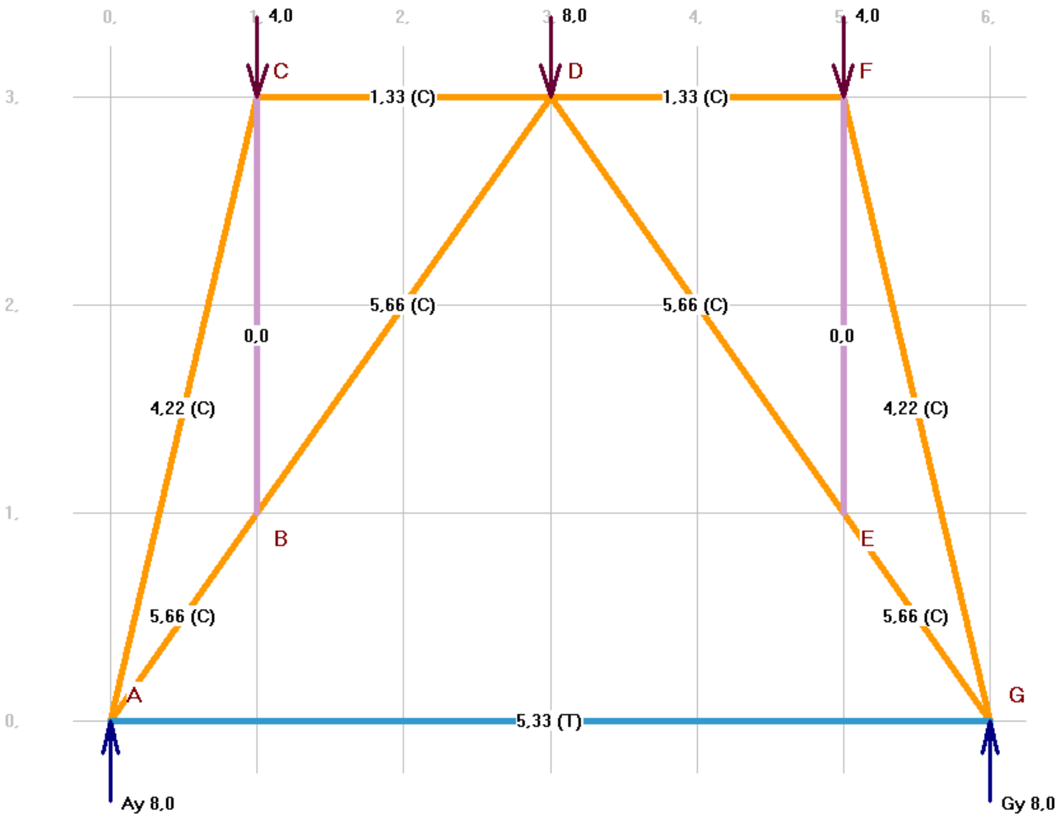


Fig. Apl-2.32.f *(reacţiunile şi eforturile sunt indicate în kN)*

problemei cu ajutorul modulului “Truss Analysis” al programului MDSolids 3.0. Observaţie: toate forţele din figura Apl-2.32.f (încărcare, reacţiuni şi eforturi din bare) sunt date în kN.

Deci se verifică rezultatele obţinute prin cele trei metode.

Apl. 2.33

Să se determine eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele din figura Apl-2.33.

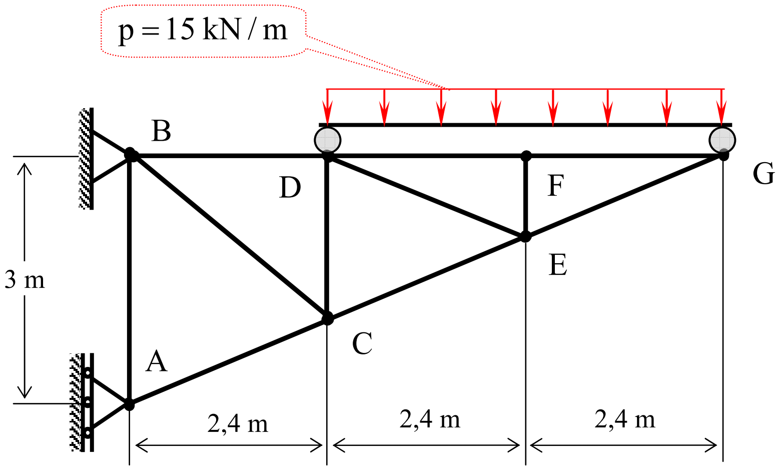


Fig. Apl-2.33

Răspuns:

$S_{AB} = 48\,[kN]$ - *Î;*

$S_{CD} = -36\,[kN]$ - *C;*

$S_{EF} = 0;$

$S_{AC} = -124{,}8\,[kN]$-*C;*

$S_{CE} = -93{,}6\,[kN]$ - *C;*

$S_{EG} = -93{,}6\,[kN]$ - *C;*

$S_{BD} = 86{,}4\,[kN]$ - *Î;*

$S_{DF} = 86{,}4\,[kN]$ - *Î;*

$S_{FG} = 86{,}4\,[kN]$ - *Î;*

$S_{DE} = 0.$

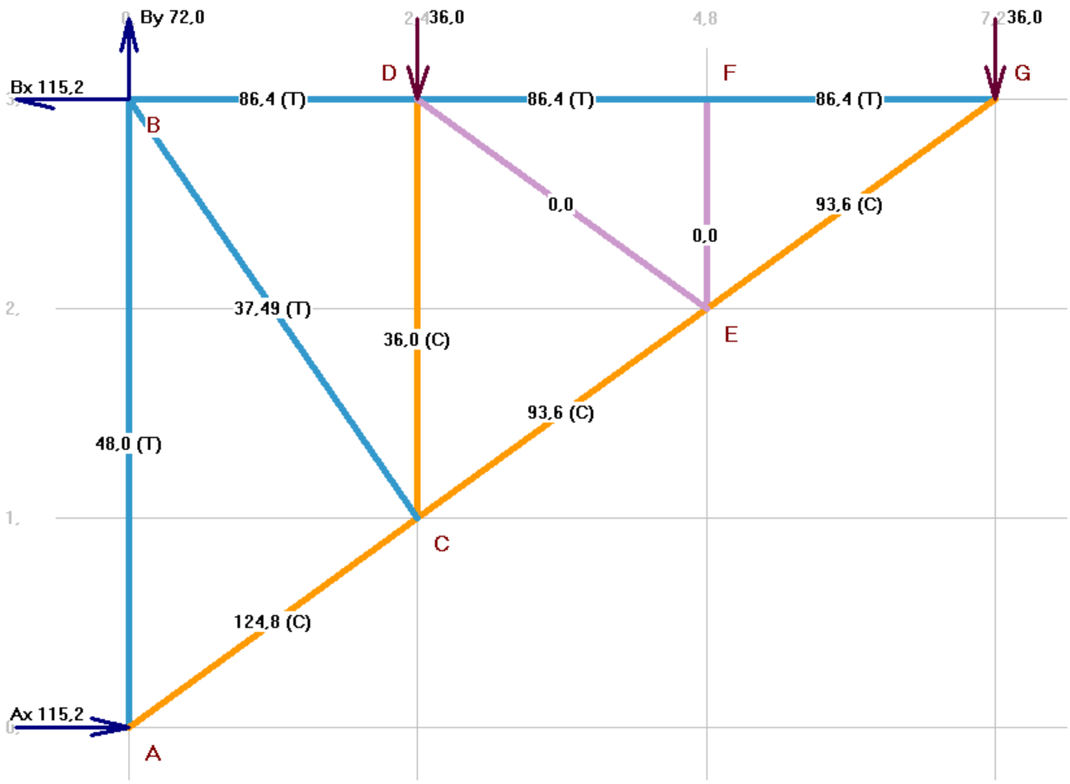


Fig. Apl-2.33.a *(reacţiunile şi eforturile sunt indicate în kN)*

2.b. ANALIZA STATICĂ - SolidWorks

1. Deschidem piesa **BATIU-exercitiu** (fig. 2.6).

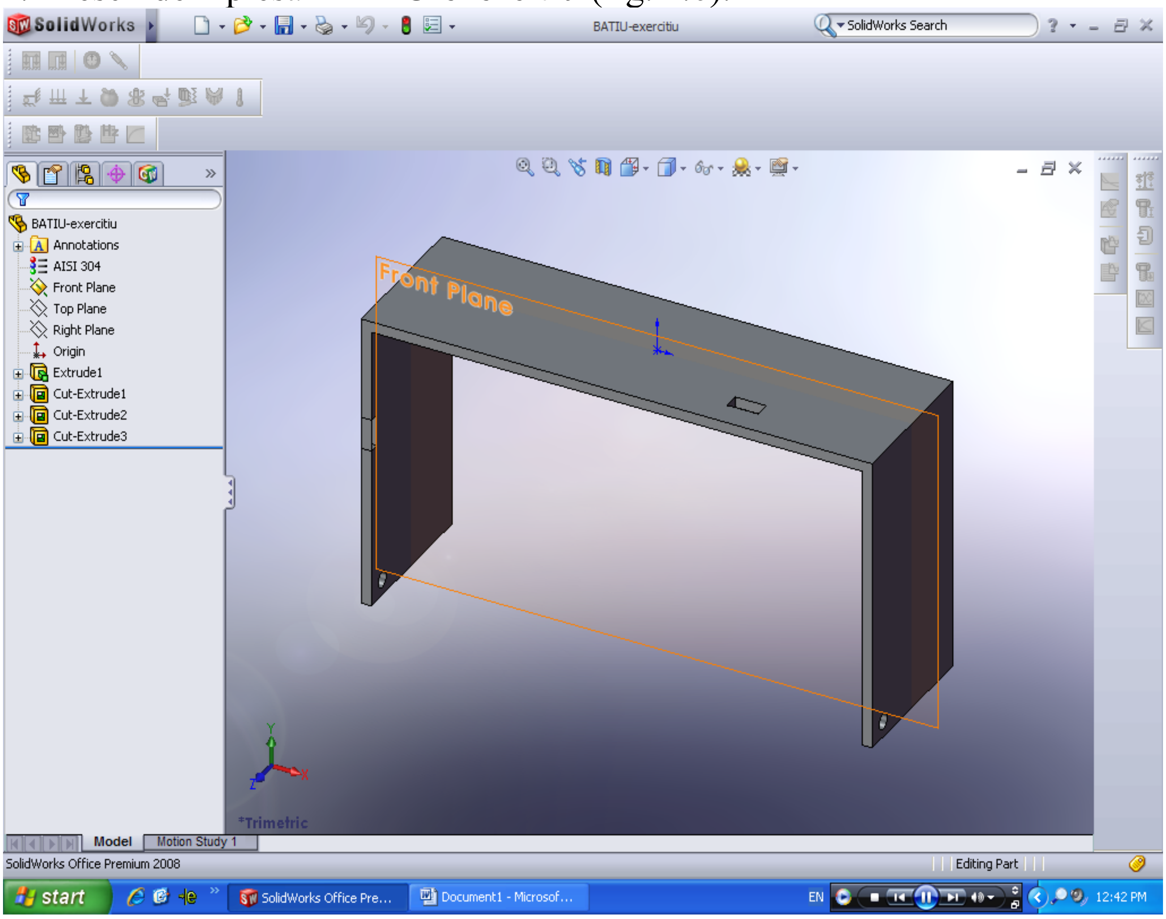


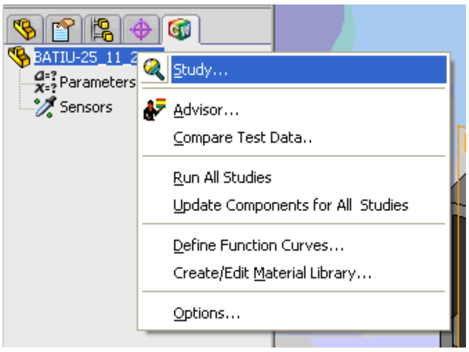
Fig. 2.6

2. Click stânga pe iconita  ce reprezinta **COSMOS AnalysisManager** şi rezultatul actiunii este reprezentat în figura 2.7.

Fig. 2.7

3. Click dreapta pe **BATIU- exercitiu,** apoi click stânga pe **Study** (fig. 2.8), rezultatul actiunii este reprezentat în figura 2.10.

3'. La rezultatul din figura 2.10 se ajunge si prin actiunile: click dreapta pe **Study** din **COSMOSWorks** de pe bara cu meniuri (fig. 2.9).



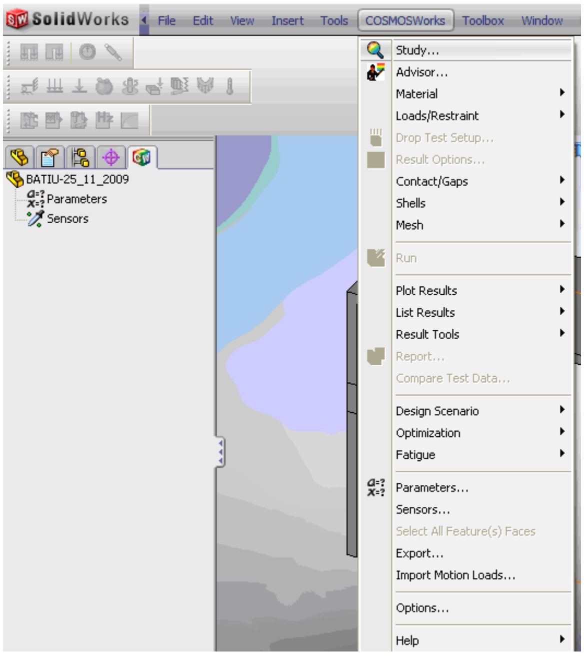
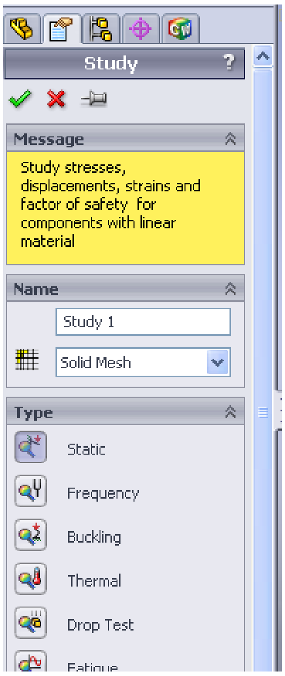
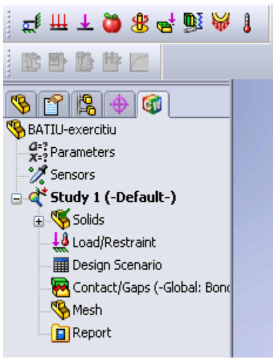


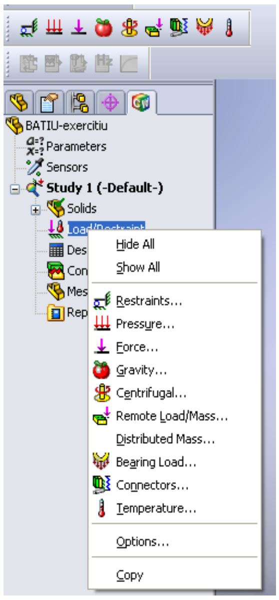
Fig. 2.8

Fig. 2.9

4. Se selecteaza din **Type** studiul **Static** (sau alte tipuri). Click **OK** si rezultatul este reprezentat în figura 2.11.







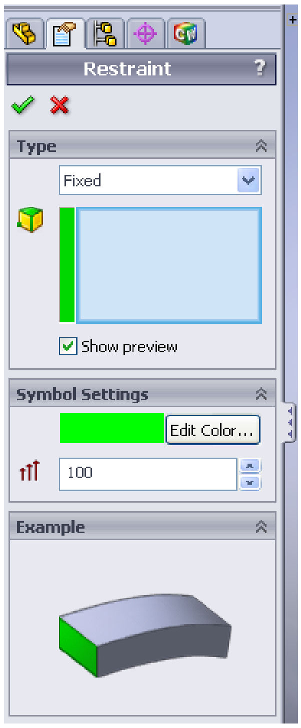


Fig. 2.10

Fig. 2.11

Fig. 2.12

Fig. 2.13

5. Click dreapta pe iconita 

si rezultatul este reprezentat în figura 2.12.

6. Click stânga pe iconita 

pentru a realiza legatura la sistemul fix (restricţii în mobilitate), si rezultatul este reprezentat în figura 2.13.

6'. Acelaşi rezultat se obţine si daca se face click stânga pe iconita 

de pe bara cu instrumente şi rezultatul este reprezentat tot în figura 2.13.

7. Selectam fata 2, indicată în dreptunghiul albastru prin < *Face 2* > şi rezultatul acţiunii este reprezentat în figura 2.14. Click **OK.**

8. Click dreapta pe iconita 

si rezultatul este reprezentat în figura 2.12.

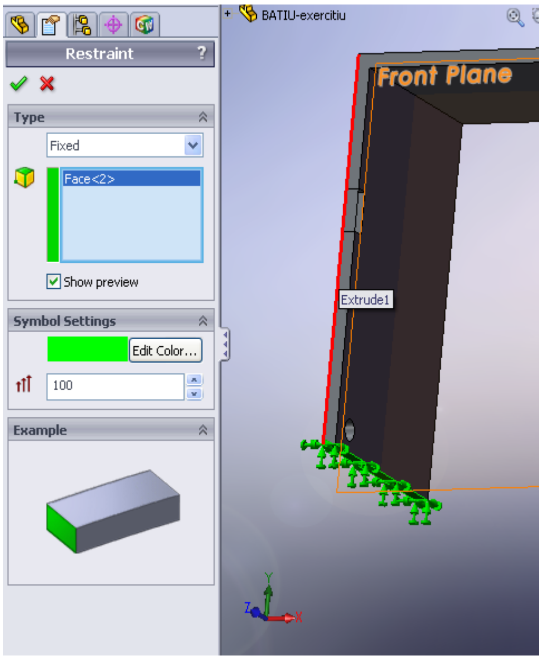


Fig. 2.14

9. Click stânga pe iconiţa 

pentru încărcarea piesei cu forţe şi rezultatul este reprezentat în figura 2.15. În această etapă se alege tipul de forţă şi punctual de aplicaţie al acesteia (prima casuţă din zona Type). În căsuţa a doua se selectează directia (paralelă cu o muchie sau perpendiculară pe un plan; sunt şi alte posibilităţi). Click **OK.**

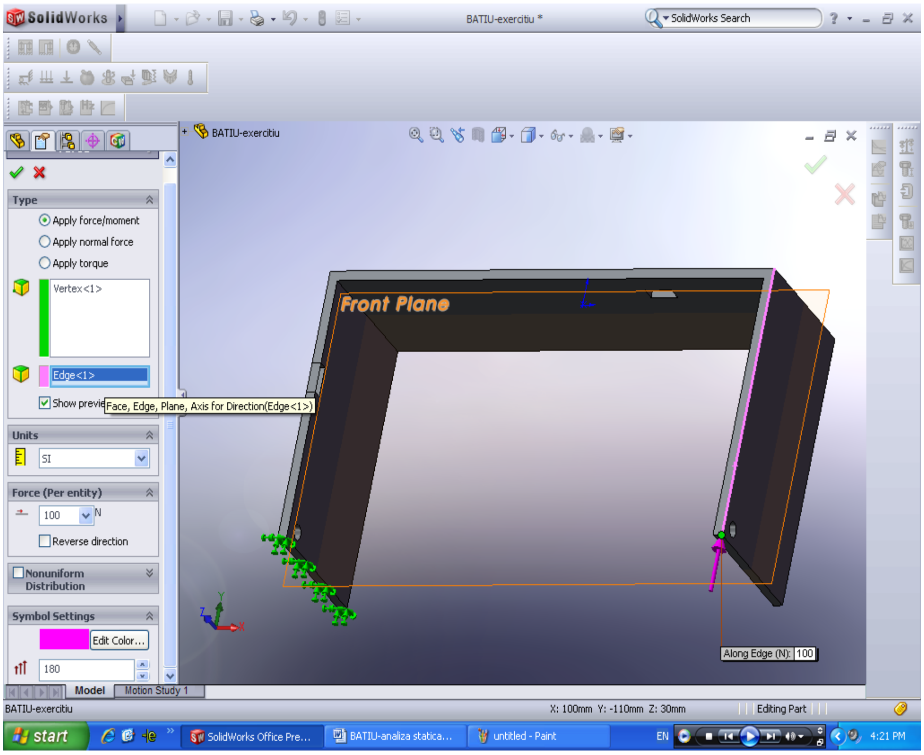


Fig. 2.15

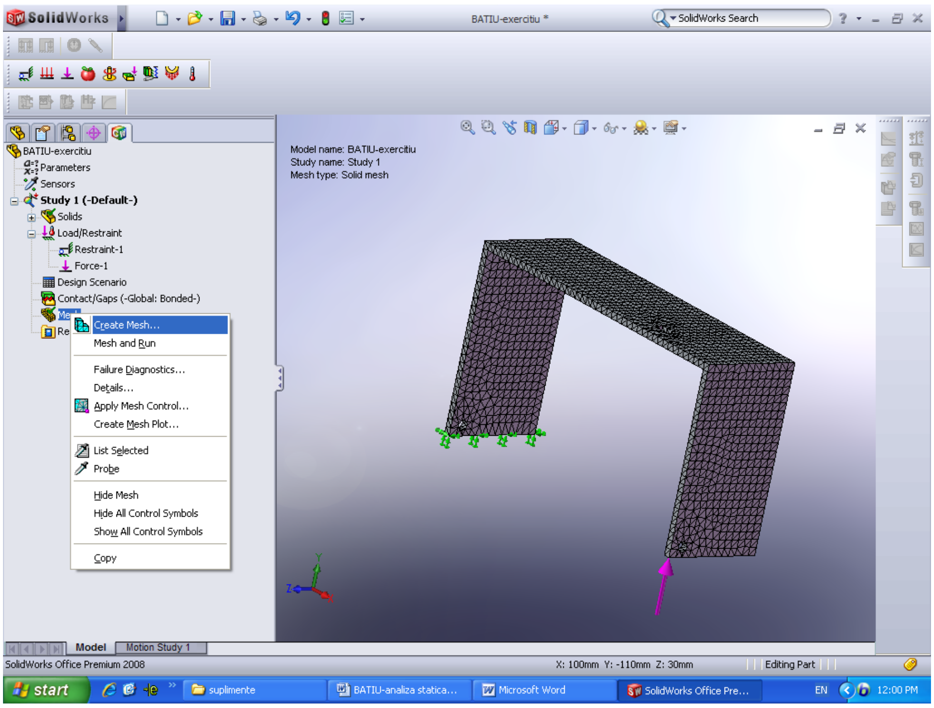


Fig. 2.16

10. Click dreapta pe iconita 

(vezi figura 2.16).

11. Click dreapta pe iconita 

(vezi figura 2.16).

Dupa click dreapta din etapa 11 se deschide casuţa **Mesh Parameters** (vezi figura 2.17) în care se stabilesc dimensiunile si tolerantele discretizarilor şi dupa click **OK** apare discretizarea (mesh-area) din figura 2.16.

În loc de click dr. pe iconita 

se face click dr. pe iconita 

şi resultă atât mesh-area cât şi deplasările şi tensiunile. În primul caz este necesar sa se parcurga etapa 12.

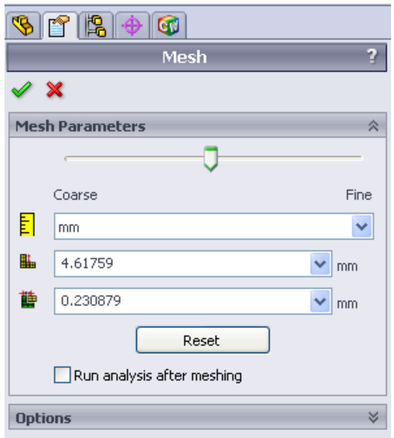


Fig. 2.17

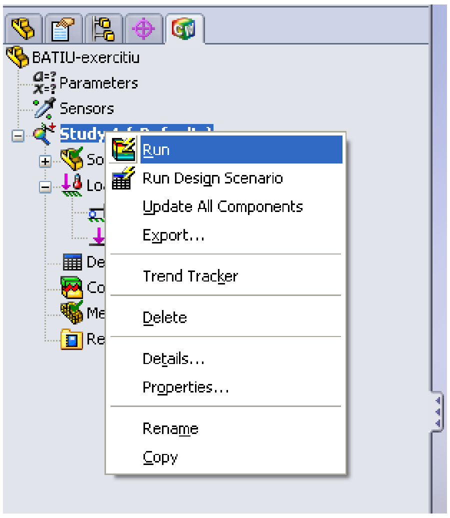


Fig. 2.18

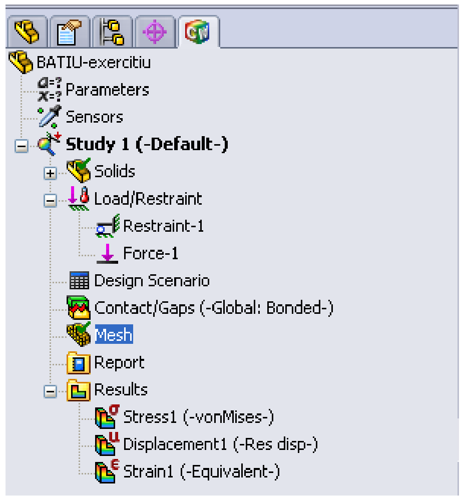
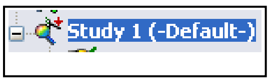


Fig. 2.19

12. Click dreapta pe iconita 

şi se deschide fereastra reprezentată în figura 2.18.

Click stânga pe iconita 

şi rezultă deplasările şi tensiunile, ca in cazul parcurgerii etapei 11. Rezulta pe ecran reprezentarea din figura 2.19, adica rezultatele analizei statice cuprinse în *Report* şi *Results.*

13. Click **Results** (fig. 2.19) şi se obţin în trei imagini deplasările şi deformaţiile piesei supusa solicitării.
14. Click ***Report*** şi obţine rezultatul analizei de forma generală de mai jos.

Stress analysis of **BATIU-exercitiu**

Note:
Do not base your design decisions solely on the data presented in this report. Use this information in conjunction with experimental data and practical experience. Field testing is mandatory to validate your final design. COSMOSWorks helps you reduce your time-to-market by reducing but not eliminating field tests.

Table of Contents

List of Figures

Imobilizarea este facuta prin fixarea fetei din stinga-jos (incastrare). Incarcarea este facuta cu o forta concentrata in virful de jos dreapta-fata.

Summarize the FEM analysis on BATIU

Assumptions

Model Information

Document Name	Configuration	Document Path	Date Modified
BATIU	Default	D:\geo-probl\PROBL - SolidWorks\BATIU.SLDPRT	Thu Feb 04 10:55:18 2010

Study Properties

Study name	Study 1
Analysis type	Static
Mesh Type:	Solid Mesh
Solver type	FFEPlus
Inplane Effect:	Off
Soft Spring:	Off
Inertial Relief:	Off
Thermal Effect:	Input Temperature
Zero strain temperature	298.000000
Units	Kelvin
Include fluid pressure effects from COSMOSFloWorks	Off
Friction:	Off
Ignore clearance for surface contact	Off
Use Adaptive Method:	Off

SI

Unit system:	SI
Length/Displacement	m
Temperature	Kelvin
Angular velocity	rad/s
Stress/Pressure	N/m^2

Proprietatile materialului

No.	Body Name	Material	Mass	Volume
1	BATIU	[SW]AISI 304	0.82763 kg	0.000103454 m^3

Material name:	**[SW]AISI 304**
Description:	
Material Source:	Used SolidWorks material
Material Library Name:	solidworks materials
Material Model Type:	Linear Elastic Isotropic

Property Name	Value	Units	Value Type
Elastic modulus	1.9e+011	N/m^2	Constant
Poisson's ratio	0.29	NA	Constant
Shear modulus	7.5e+010	N/m^2	Constant
Mass density	8000	kg/m^3	Constant
Tensile strength	5.1702e+008	N/m^2	Constant
Yield strength	2.0681e+008	N/m^2	Constant
Thermal expansion coefficient	1.8e-005	/Kelvin	Constant
Thermal conductivity	16	W/(m.K)	Constant

Specific heat	500	J/(kg.K)	Constant

Forta concentrata. Incastrarea face imobilizarea.

Restraint		
Restraint name	**Selection set**	**Description**
Restraint-1 <BATIU>	on 1 Face(s) fixed.	

Load			
Load name	**Selection set**	**Loading type**	**Description**
Force-1 <BATIU>	on 1 Vertex(s) apply force 50 N normal to reference plane with respect to selected reference Edge< 1 > using uniform distribution	Sequential Loading	

CONNECTOR DEFINITIONS

No Connectors were defined

CONTACT

Contact state: Touching faces - Bonded

MESH INFORMATION

Mesh Type:	Solid Mesh
Mesher Used:	Standard
Automatic Transition:	Off
Smooth Surface:	On
Jacobian Check:	4 Points
Element Size:	4.6959 mm
Tolerance:	0.23479 mm
Quality:	High
Number of elements:	8396
Number of nodes:	16685
Time to complete mesh(hh;mm;ss):	00:00:02
Computer name:	MECANICA-1061EC

Design Scenario Results

No data available.

Sensor Results

No data available.

Reaction Forces

Selection set	Units	Sum X	Sum Y	Sum Z	Resultant
Entire Body	N	0.0536094	-50.0005	-0.0333881	50.0005

Free-Body Forces

Selection set	Units	Sum X	Sum Y	Sum Z	Resultant
Entire Body	N	0.00599593	0.000853386	-0.000369708	0.00606763

Free-body Moments					
Selection set	**Units**	**Sum X**	**Sum Y**	**Sum Z**	**Resultant**

Entire Body	N-m	0	0	0	1e-033

Bolt Forces

No data available.

Pin Forces

No data available.

Study Results

Default Results

Name	**Type**	**Min**	**Location**	**Max**	**Location**
Stress1	VON: von Mises Stress	7527.42 N/m^2 Node: 8456	(108 mm, -110 mm, -30 mm)	1.08553e+008 N/m^2 Node: 16685	(-110 mm, -105.026 mm, 19.1809 mm)
Displacement1	URES: Resultant Displacement	0 m Node: 55	(-110 mm, -110 mm, -30 mm)	0.00753946 m Node: 1671	(110 mm, -110 mm, 30 mm)
Strain1	ESTRN: Equivalent Strain	3.25987e-008 Element: 7176	(108 mm, -108.854 mm, -28.8462 mm)	0.000302214 Element: 7799	(-106.466 mm, -105.915 mm, 18.1665 mm)

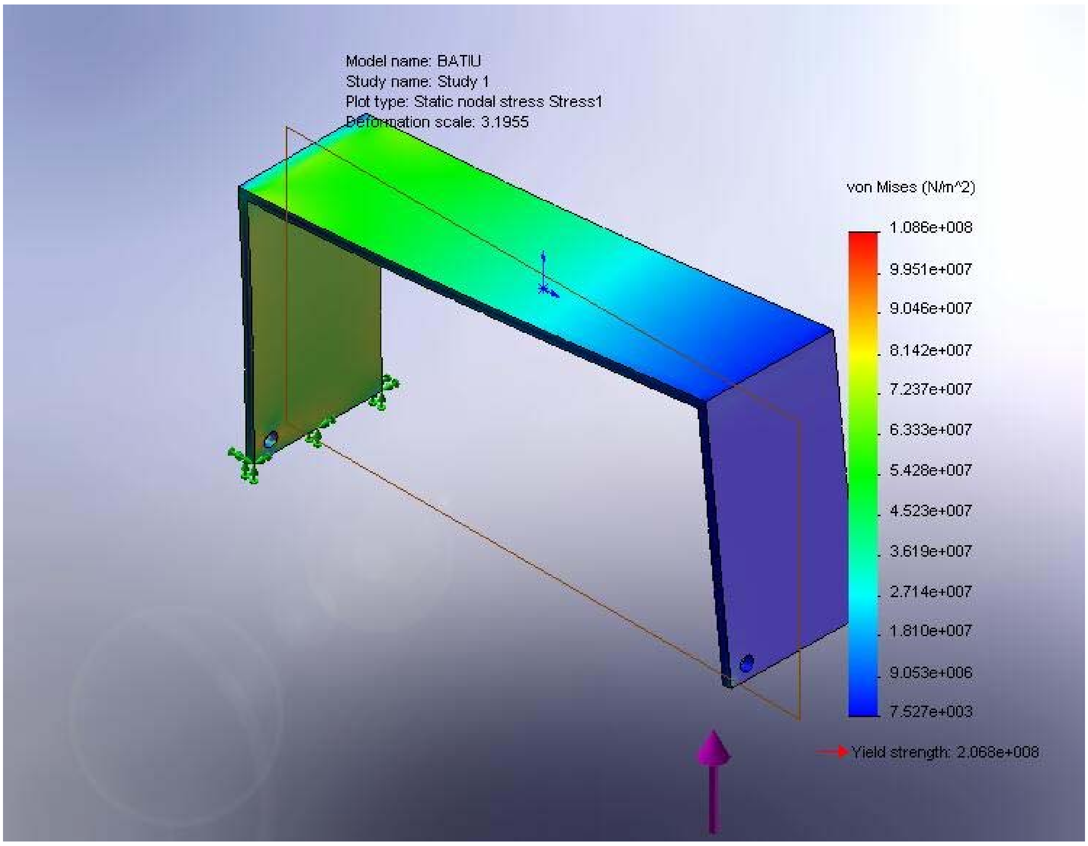


Fig. 2.20. BATIU-Study 1-Stress-Stress1

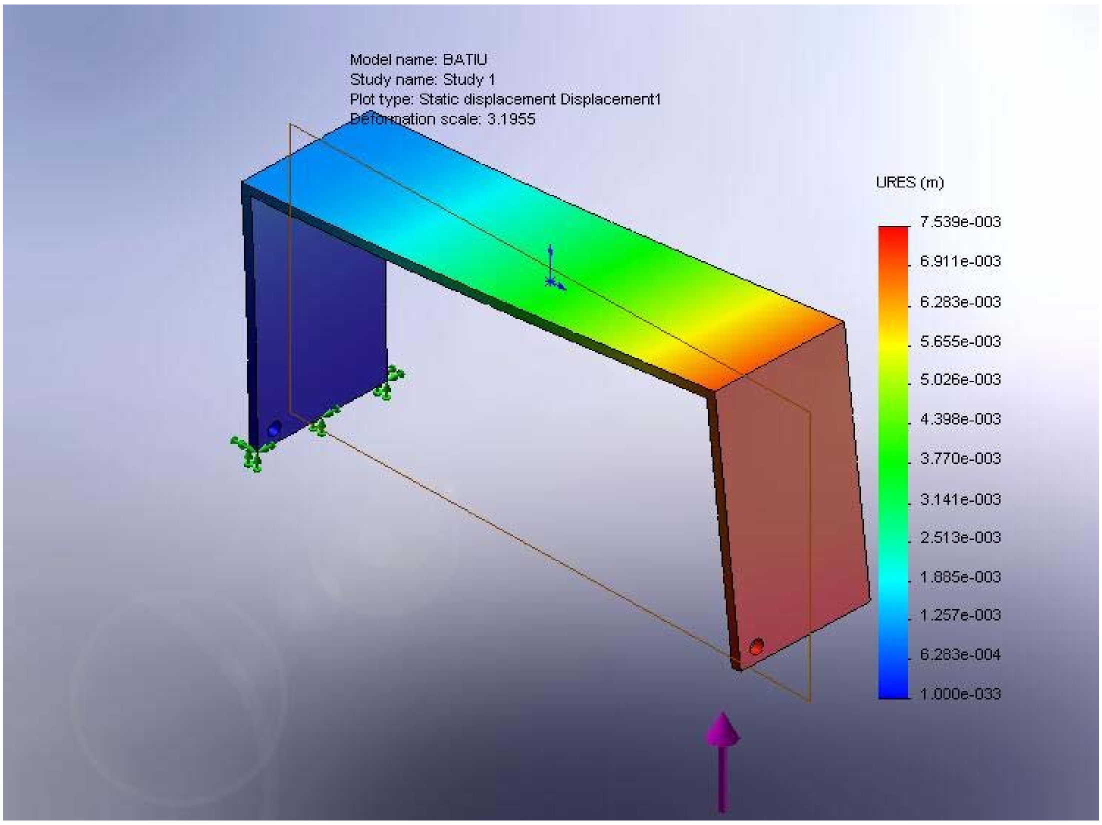


Fig. 2.21. BATIU-Study 1-Displacement-Displacement1

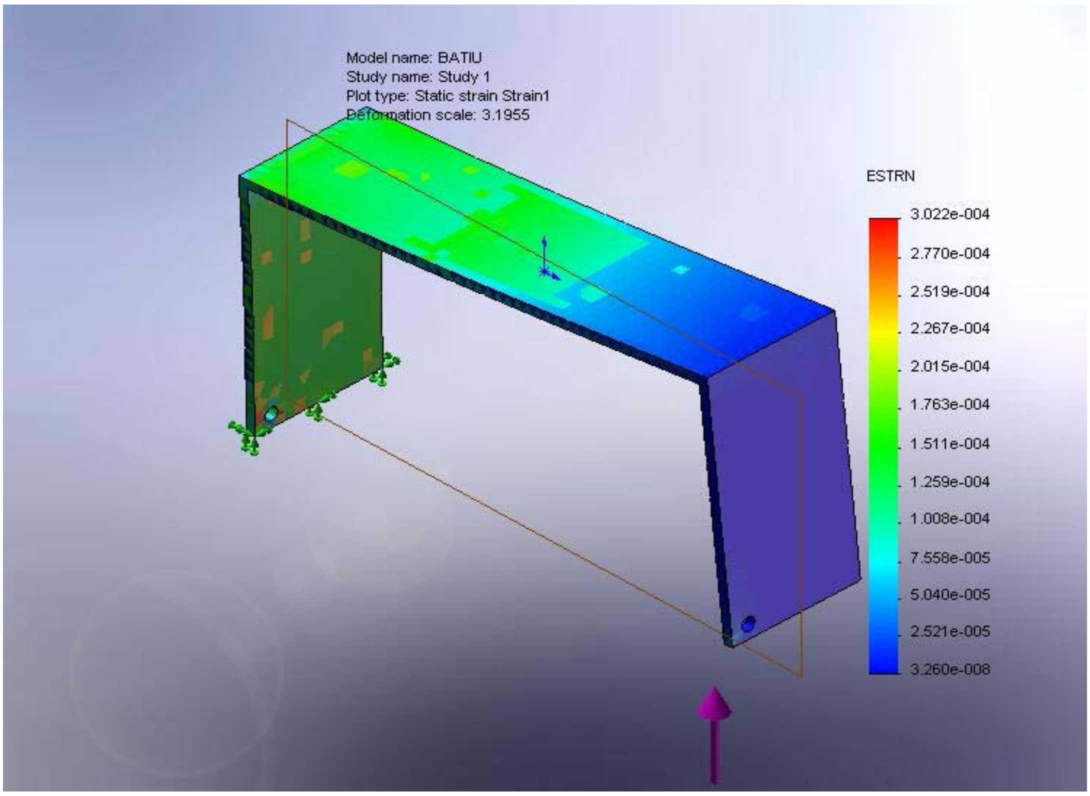


Fig. 2.22. BATIU-Study 1-Strain-Strain1

Conclusion

-

2.c. Analiza statica - SolidWorks
ALTE EXEMPLE

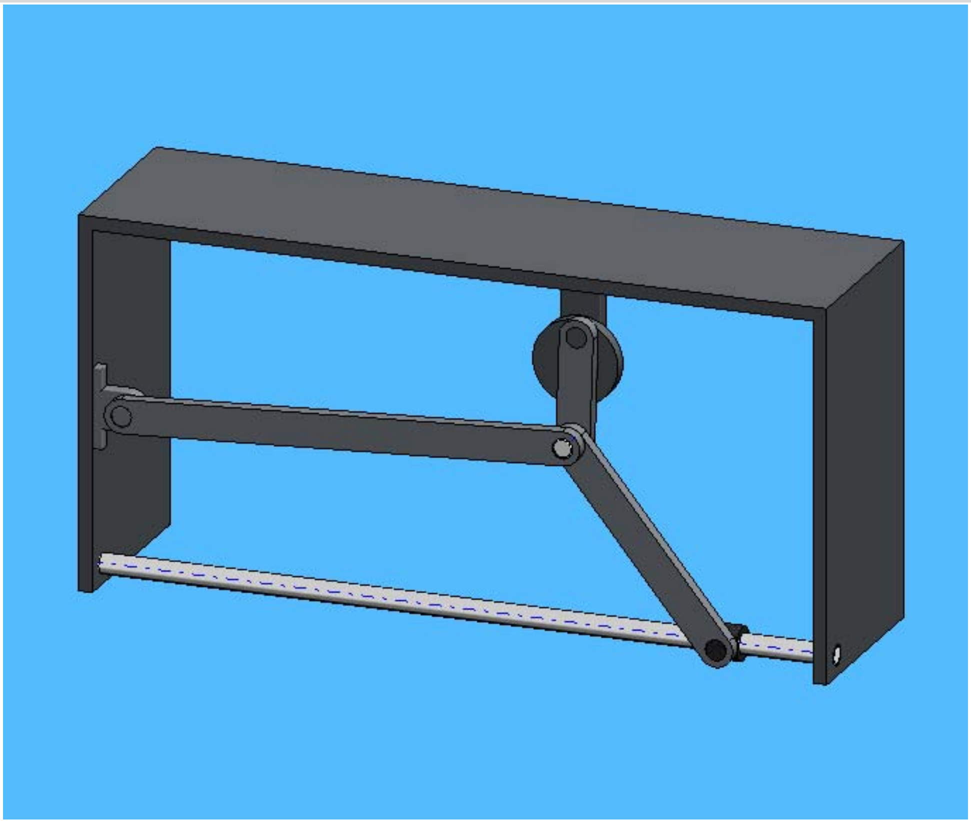


Fig. 2.23.- Ansamblul structurii pentru care se fac studiile statice si cinematice cu ajutorul programului SOLIDWorks

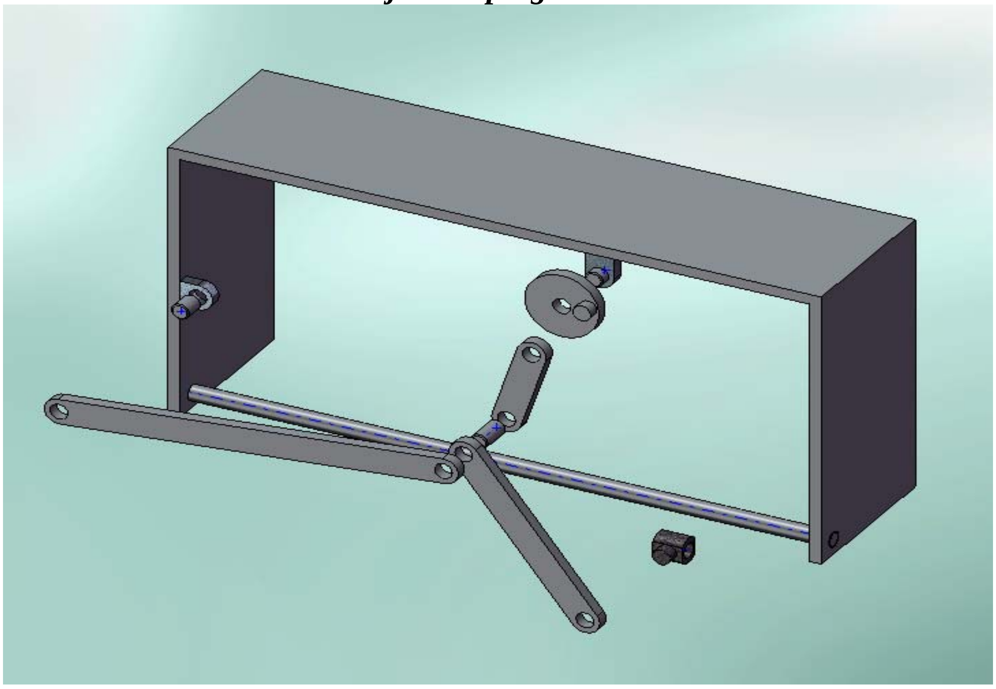


Fig. 2.24. Ansamblul structurii pentru care se fac studiile statice si cinematice cu ajutorul programului SOLIDWorks – in explozie

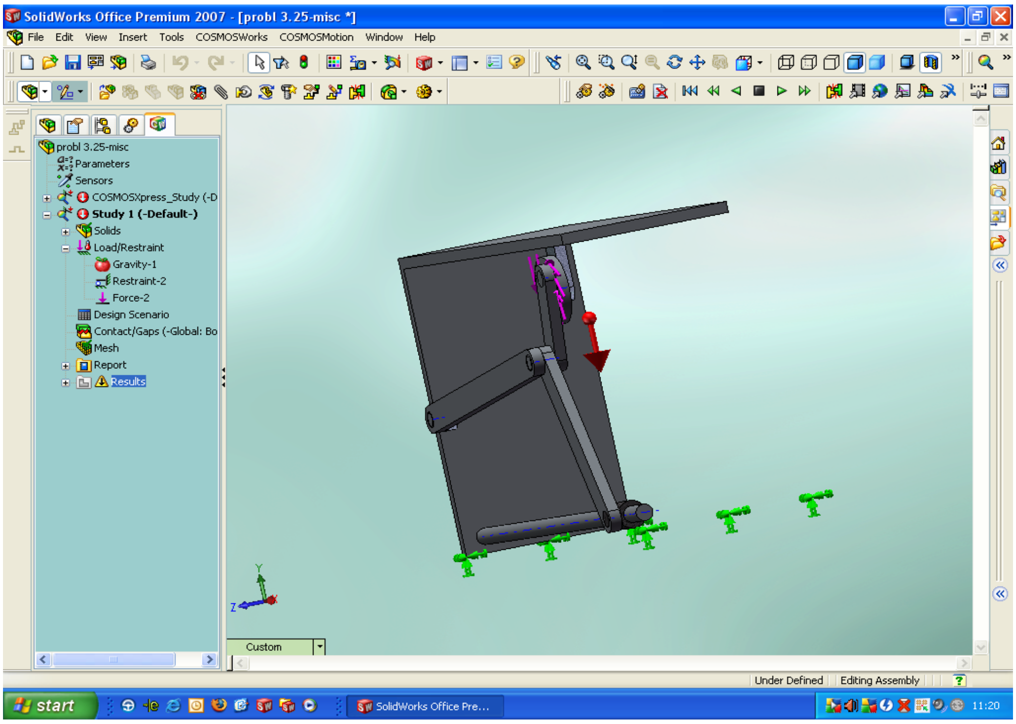


Fig. 2.25. **Restrictii si incarcarea statica realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks –***sectiune in ansamblu*

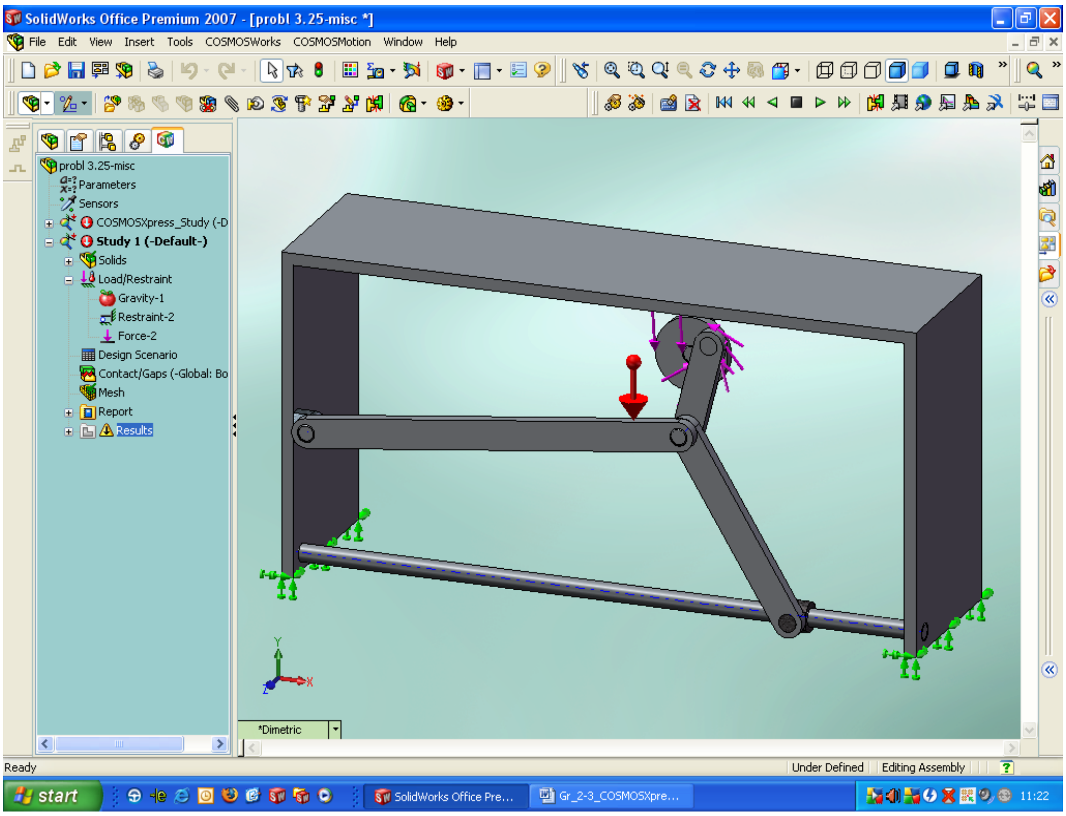


Fig. 2.26. **Restrictii si incarcarea statica realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks**

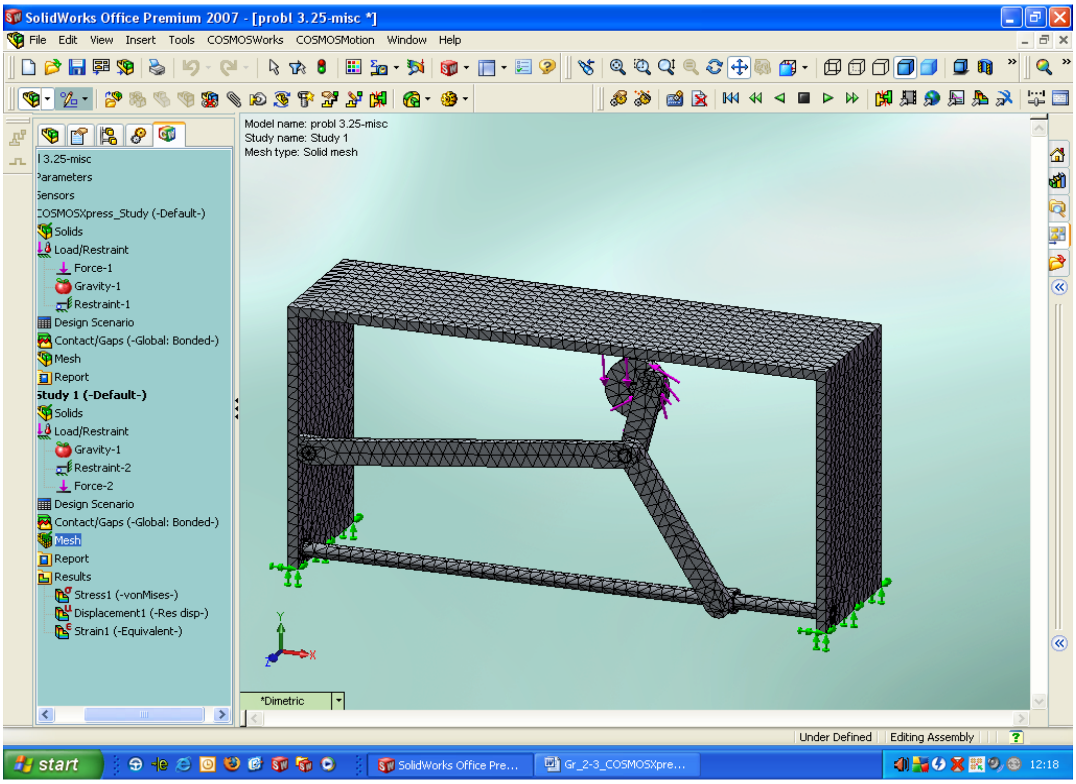


Fig. 2.27. Mesh-area realizata cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks

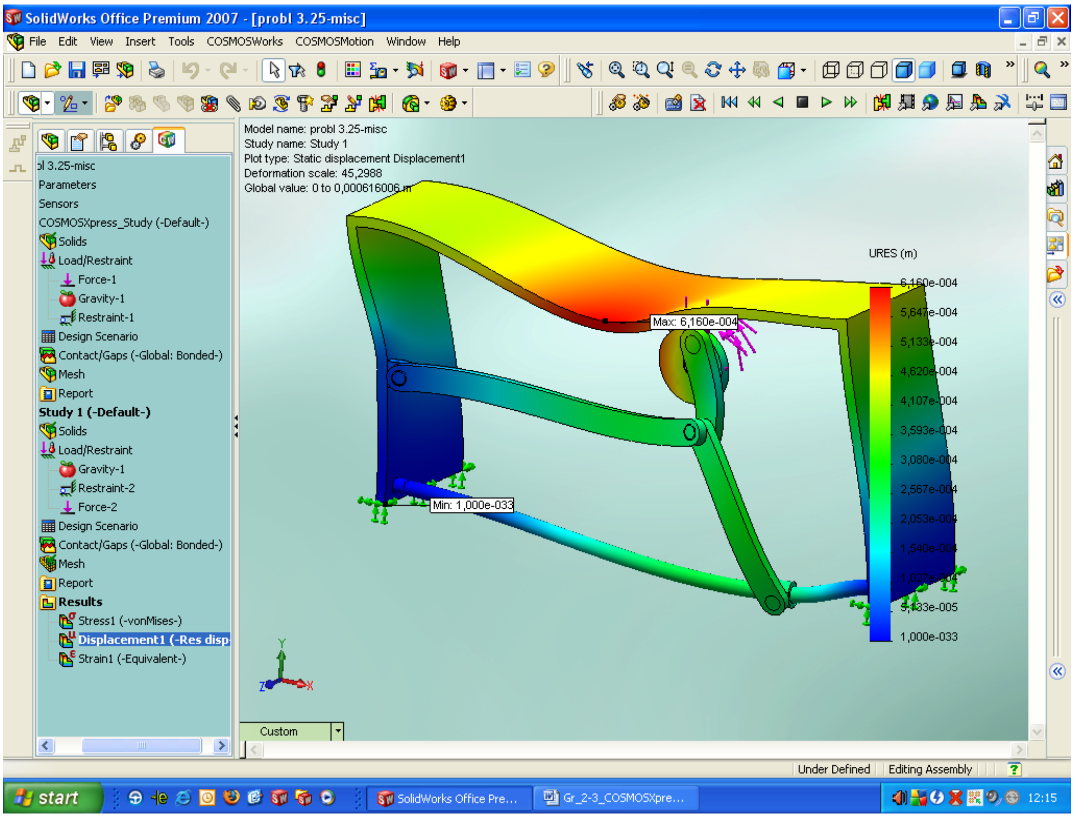


Fig. 2.28. Deplasarile rezultate din incarcarile statice realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks Deplasari – *alte restrictii*

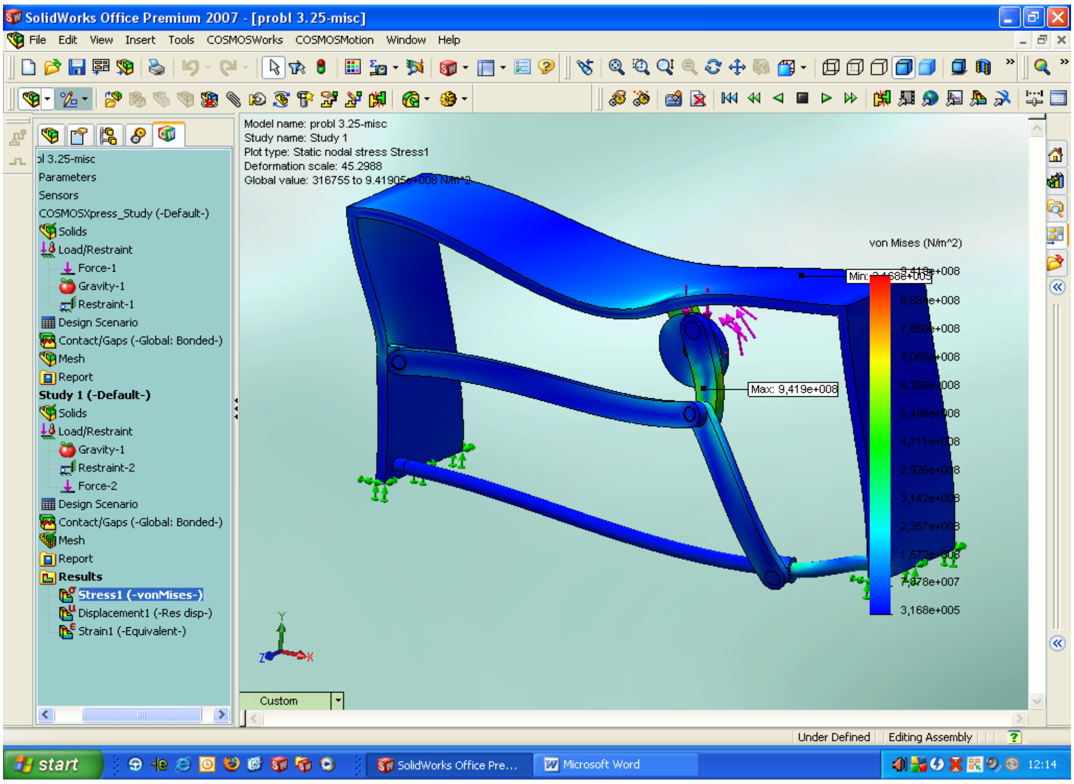


Fig. 2.29. ***Tensiunile (N/m^2) rezultate din incarcarile statice realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks –*** *alte restrictii*

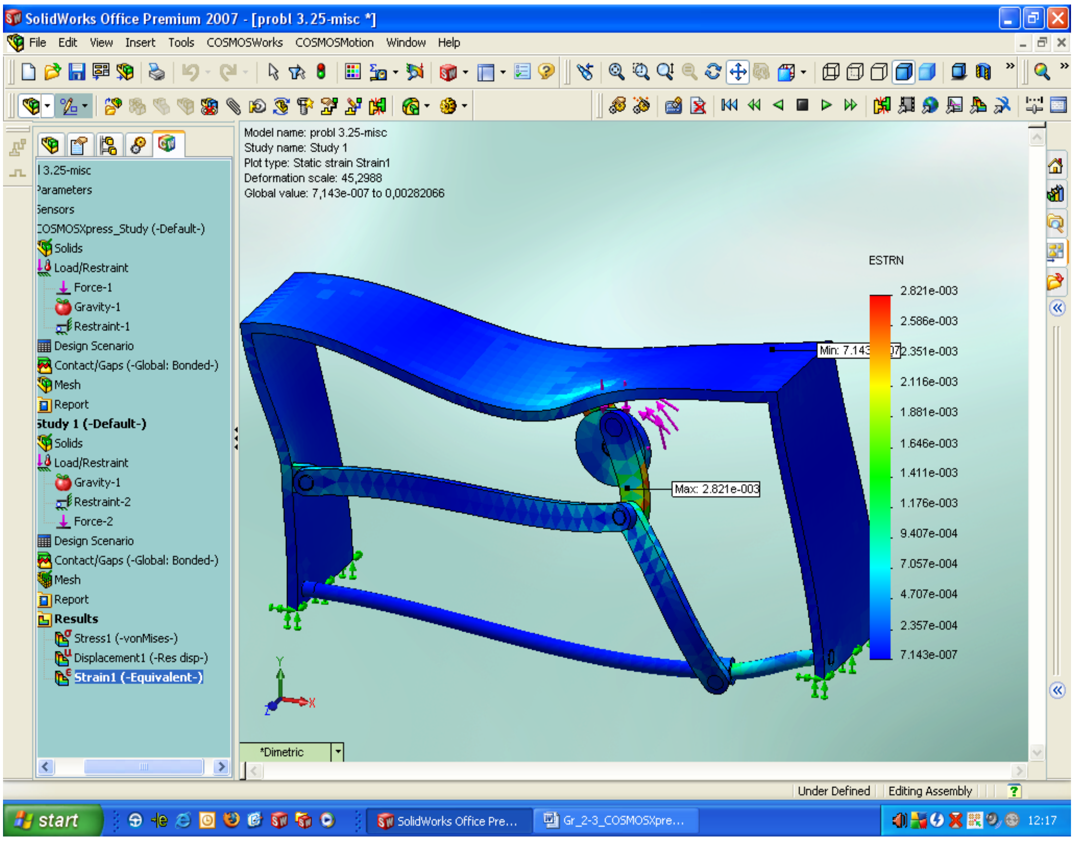


Fig. 2.30. Intindere-compresiune - rezultate din incarcarile statice realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks

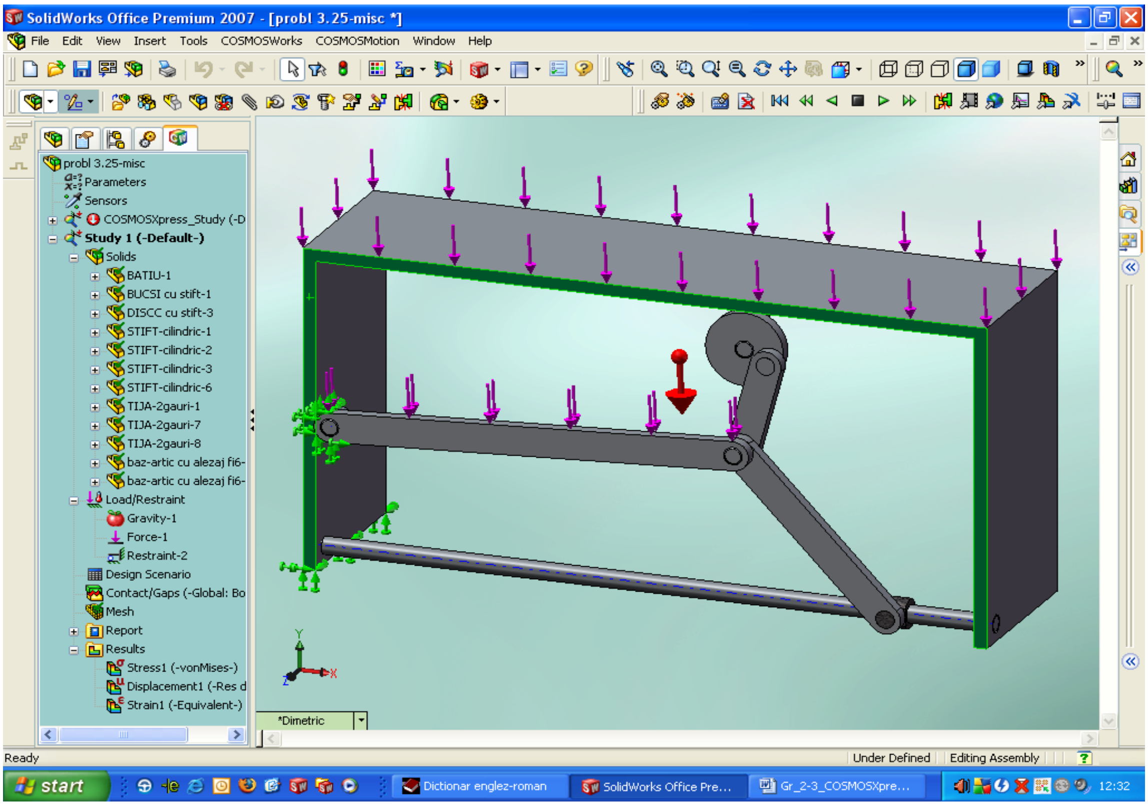


Fig. 2.31. ***Restrictii si incarcarea statica realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks–*** *alte restrictii*

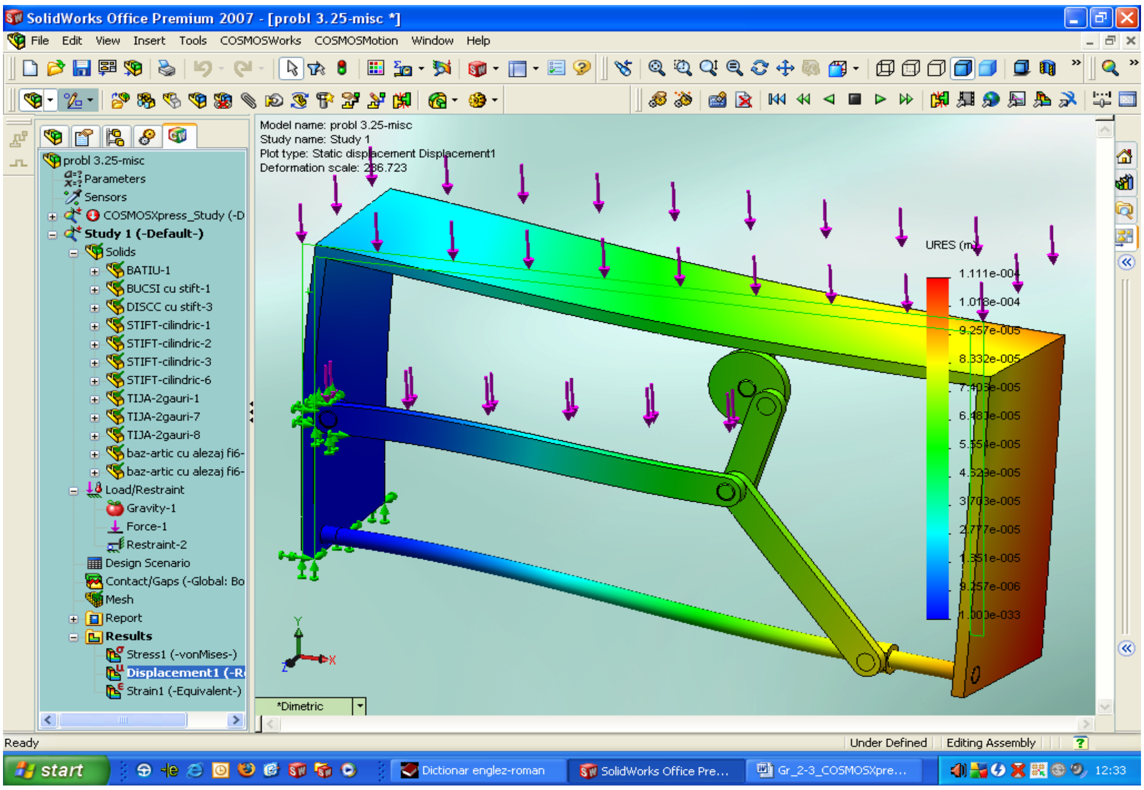


Fig. 2.32. ***Deplasarile rezultate din incarcarile statice realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks–*** *alte restrictii*

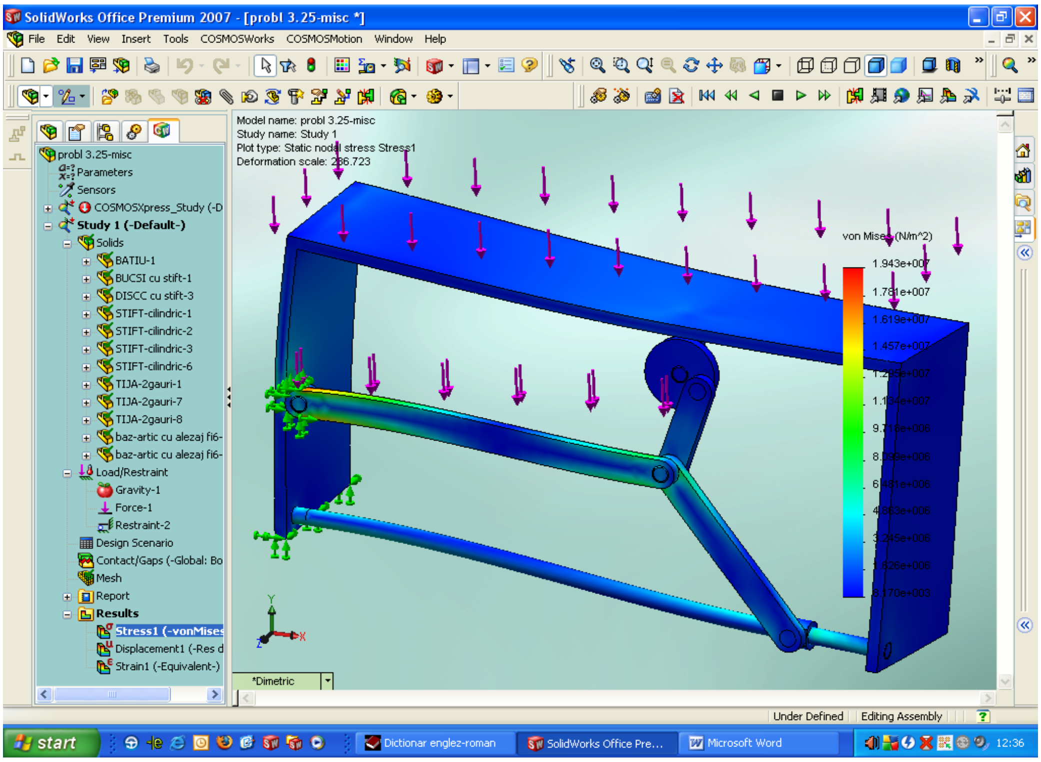


Fig. 2.33. ***Tensiunile (N/m^2) rezultate din incarcarile statice realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks–*** *alte restrictii*

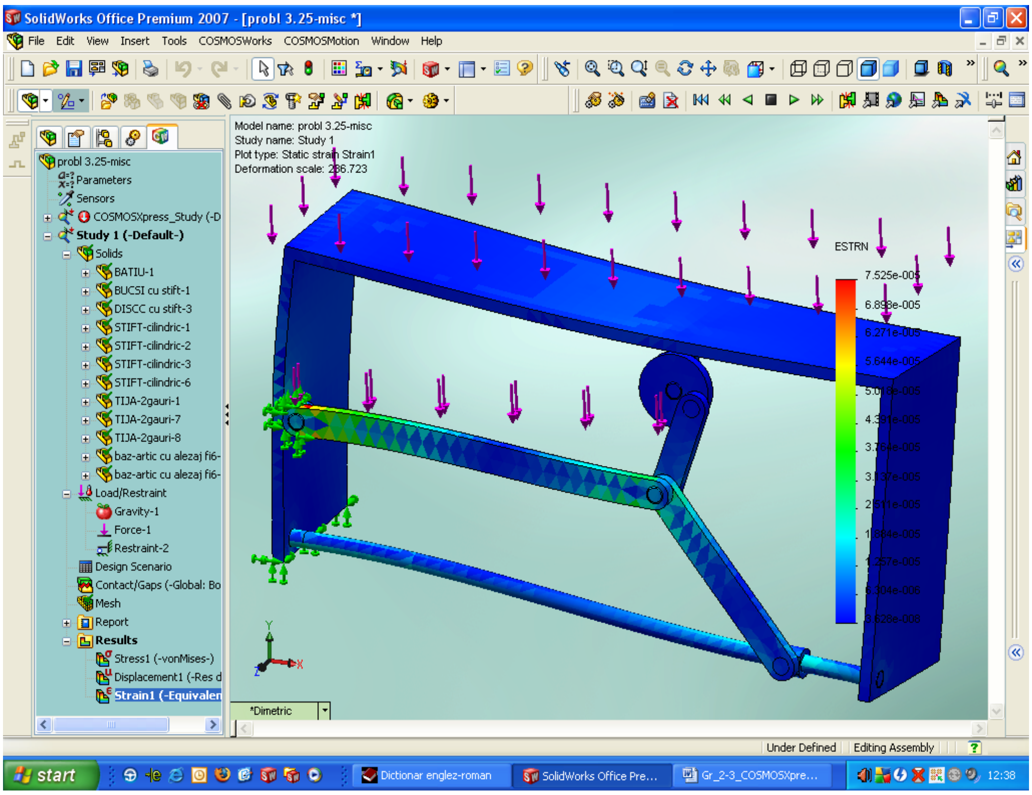


Fig. 2.34. ***Intindere-compresiune - rezultate din incarcarile statice realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSWorks–*** *alte restrictii*

CAPITOLUL 3

Notiuni generale de cinematica

3. NOTIUNI GENERALE DE CINEMATICA

3.1. Traiectorii, viteze, acceleraţii

Pentru a cunoaşte traiectoria unui punct material, este necesar a fi cunoscut vectorul de poziţie al acestui punct material ca funcţie de timp (uniformă, continuă şi derivabilă de două ori), vector de poziţie ce are originea într-un punct fix O din spaţiu (fig. 3.1). În problemele spaţiale, vectorul de poziţie are în componenţă 3 parametri scalari variabili în timp, care în funcţie de sistemul de referinţă ales pot fi: coordonatele carteziene, coordonatele sferice, coordonatele cilindrice etc.

Traiectoria unui punct material este locul geometric al poziţiilor succesive ale extremităţii vectorului de poziţie $\bar{r}(t)=\overline{OM}$, al punctului material în timpul mişcării sale. Pentru cunoaşterea mişcării punctului M, este necesară cunoaşterea ecuaţiilor parametrice ale traiectoriei acestuia, care pot fi:

- în coordonate carteziene

$$x=x(t);\quad y=y(t);\quad z=z(t); \tag{3.1}$$

- în coordonate cilindrice

$$r=r(t);\quad \theta=\theta(t);\quad z=z(t); \tag{3.2}$$

- în coordonate sferice

$$r=r(t);\quad \theta=\theta(t);\quad \varphi=\varphi(t). \tag{3.3}$$

Relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele cilindrice respectiv coordonatele sferice sunt stabilite în capitolul 2 (statica punctului material).

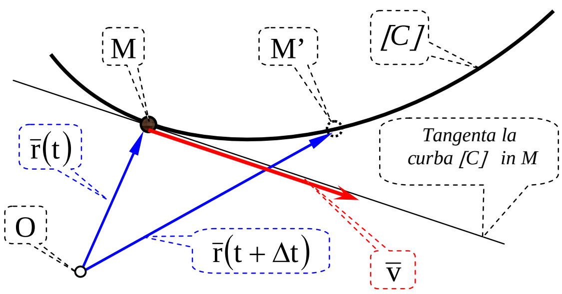


Fig. 3.1.

Viteza. Considerăm punctul material în poziţia M, la momentul t, poziţionat prin vectorul de poziţie $\bar{r}(t)$ şi în poziţia M', la momentul $(t+\Delta t)$, poziţionat prin vectorul de poziţie $\bar{r}(t+\Delta t)$ ca în figura 3.1.

Viteza medie a punctului material mobil între poziţiile M şi M' este prin definiţie:

$$v_m=\frac{\text{arc}MM'}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Vectorul viteză instantanee este dat de derivata în raport cu timpul a funcţiei vectoriale de timp, vectorul de poziţie $\bar{r}(t)$, adică:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}; \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\left|\overline{MM'}\right|} \cdot \frac{\left|\overline{MM'}\right|}{\mathrm{arc}MM'} \cdot \frac{\mathrm{arc}MM'}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\left|\overline{MM'}\right|} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\overline{MM'}\right|}{\mathrm{arc}MM'} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{arc}MM'}{\Delta t} = \bar{\tau} \cdot 1 \cdot \dot{s} = \bar{\tau} \cdot v; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = v \cdot \bar{\tau}. \tag{3.7}$$

Mişcarea punctului M pe traiectoria $[C]$ fiind cunoscută, relaţia care o descrie este:

$$s = s(t), \tag{3.8}$$

cunoscută deasemeni şi poartă denumirea de *ecuaţie orară a mişcării*.

Din relaţia de definiţie a vitezei (3.5) rezultă următoarea ecuaţie dimensională a acestei mărimi:

$$[v] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}.$$

În sistemul internaţional de unităţi (SI) viteza se măsoară în metri pe secundă **(m/s).**

Acceleraţia punctului M este mărimea vectorială care caracterizează

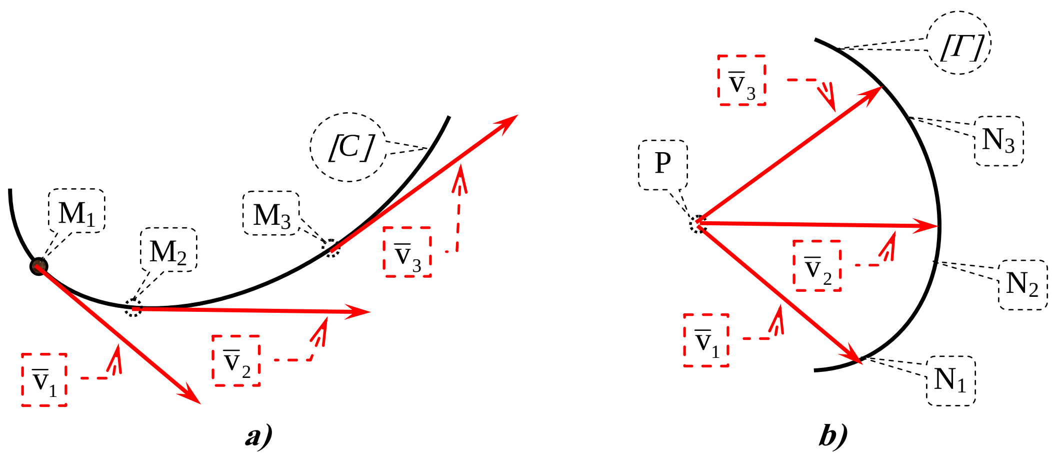


Fig. 3.2.

variaţia în timp a vectorului viteză. Pentru a o determina, alegem un punct arbitrar P (fig. 3.2,b) în care construim vectori echipolenţi cu vectorii viteză $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ... , $\bar{v}_n$ ai punctului mobil M (fig. 3.2,a), aflat în diferite poziţii pe traiectoria sa $[C]$.

Unind vârfurile vectorilor echipolenţi construiţi cu originea în P obţinem o curbă $[\Gamma]$ numită **hodograful vitezelor** (fig. 3.2, b),, după cum unind vârfurile tuturor vectorilor de poziţie $\bar{r}$ am obţinut curba $[C]$ descrisă de punctul material. În timp ce punctul material mobil M parcurge traiectoria sa, punctul N parcurge traiectoria vârfului vectorului viteză (hodograful vitezelor), astfel încât atunci când punctul M se află într-o anumită poziţie pe traiectoria sa $[C]$ şi are viteza $\bar{v}$, punctul N corespunzător de pe curba $[\Gamma]$ se află în poziţia în care vectorul său de poziţie este $\bar{v}$. Calculăm viteza punctului N. Pentru aceasta este suficient doar să înlocuim în formula vitezei (3.7) vectorul de poziţie $\bar{r}$ prin vectorul viteză $\bar{v}$ şi vom avea:

$$\bar{v}_N = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \bar{a}. \tag{3.9}$$

Cu alte cuvinte *viteza de deplasare a punctului N, vârful vectorului pe hodograful vitezei $[\Gamma]$ este chiar acceleraţia punctului material M în mişcarea reală pe curba $[C]$.*

Din relaţia de definiţie (3.9) a acceleraţiei rezultă următoarea ecuaţie dimensională a acestei mărimi:

$$[a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2} = L \cdot T^{-2}.$$

În sistemul internaţional de unităţi (SI) acceleraţia se măsoară în metri pe secundă la pătrat (**m/s^2**).

3.2. Componentele vitezei şi ale acceleraţiei în diferite sisteme de coordonate

3.2.1. Sistemul de coordonate carteziene

Exprimăm vectorul de poziţie în funcţie de proiecţiile sale pe axele unui sistem cartezian Oxyz, ale căror direcţii sunt fixe, date de versorii constanţi $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}. \tag{3.10}$$

Derivăm relaţia (3.10) în raport cu timpul:

$$\bar{v} = \dot{x}(t)\cdot\bar{i} + \dot{y}(t)\cdot\bar{j} + \dot{z}(t)\cdot\bar{k} + x(t)\cdot\dot{\bar{i}} + y(t)\cdot\dot{\bar{j}} + z(t)\cdot\dot{\bar{k}}. \tag{3.11}$$

Deoarece $\dot{\bar{i}} = 0$, $\dot{\bar{j}} = 0$, $\dot{\bar{k}} = 0$, rezultă expresia vectorului viteză în funcţie de proiecţiile sale pe axele sistemului cartezian de referinţă:

$$\bar{v} = v_x\cdot\bar{i} + v_y\cdot\bar{j} + v_z\cdot\bar{k} \tag{3.12}$$

şi modulul său

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{3.13}$$

Apoi derivăm relaţia (3.12) în raport cu timpul, şi din aceleaşi considerente, obţinem expresia vectorului acceleraţie în funcţie de proiecţiile sale pe axele sistemului cartezian şi modulul său:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}\cdot\bar{i} + \ddot{y}\cdot\bar{j} + \ddot{z}\cdot\bar{k} = \dot{v}_x\cdot\bar{i} + \dot{v}_y\cdot\bar{j} + \dot{v}_z\cdot\bar{k} \tag{3.14}$$

$$|a| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{3.15}$$

3.2.2. Sistemul de coordonate polare

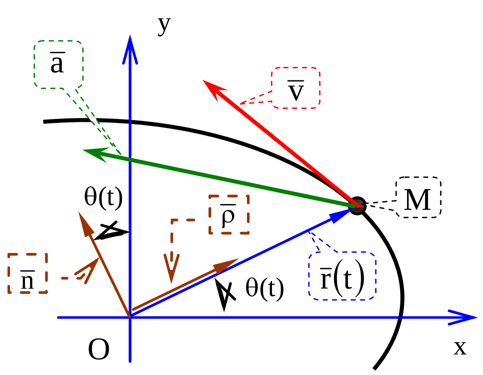


Fig. 3.3.

Acest sistem de coordonate se utilizează pentru studiul mişcărilor plane ale punctului material, fapt pentru care axele sistemului xOy şi ale sistemului polar cu versorii $\bar{\rho}$ şi $\bar{n}$, sunt coplanare cu planul mişcării (fig. 3.4). Axele sistemului polar sunt mobile, deci parametrii $\bar{\rho}$ şi $\bar{n}$ sunt variabili în direcţie şi exprimaţi în funcţie de timp prin expresiile:

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \cos\theta\cdot\bar{i} + \sin\theta\cdot\bar{j} \\ \bar{n} = -\sin\theta\cdot\bar{i} + \cos\theta\cdot\bar{j} \end{cases} \tag{3.16}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţiile (3.16):

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{\rho}} = -\dot{\theta}\cdot\sin\theta\cdot\bar{i} + \dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\bar{j} = \dot{\theta}\cdot\bar{n} \\ \dot{\bar{n}} = -\dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\bar{i} - \dot{\theta}\cdot\sin\theta\cdot\bar{j} = -\dot{\theta}\cdot\bar{\rho} \end{cases} \tag{3.17}$$

Între coordonatele carteziene şi cele polare ale aceluiaşi punct există relaţiile:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta, \\ y = r \cdot \sin\theta. \end{cases} \tag{3.18}$$

În general, în timpul mişcării punctului material, coordonatele sale polare se schimbă, adică sunt funcţii de timp $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, motiv pentru care relaţiile (3.18) reprezintă *ecuaţiile parametrice ale traiectoriei* [C] a punctului M, parametrul fiind timpul.

Din schiţă se observă că vectorul de poziţie $\bar{r}$ şi versorul $\bar{\rho}$ sunt coliniari, adică:

$$\bar{r} = r \cdot \bar{\rho} \tag{3.19}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţia (3.19) şi având în vedere şi relaţia (3.17_1), obţinem vectorul viteză a punctului M,

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r} \cdot \bar{\rho} + r \cdot \dot{\bar{\rho}} = \dot{r} \cdot \bar{\rho} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{n} \tag{3.20}$$

Proiecţiile vectorului viteză $\bar{v}$, pe axele sistemului de coordonate polare de versori $\bar{\rho}$ şi $\bar{n}$, sunt:

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{r}, \\ v_n = r \cdot \dot{\theta}, \end{cases} \tag{3.21}$$

iar modulul său

$$\Rightarrow \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cdot \dot{\theta}\right)^2} \tag{3.22}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţia (3.20) şi obţinem vectorul acceleraţie a punctului M:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{r} \cdot \bar{\rho} + \dot{r} \cdot \dot{\bar{\rho}} + \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{n} + r \cdot \ddot{\theta} \cdot \bar{n} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\bar{n}},$$

sau ordonată după versorii axelor

$$\bar{a} = \left(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2\right) \cdot \bar{\rho} + \left(2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{r} + r \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot \bar{n}. \tag{3.23}$$

Proiecţiile vectorului acceleraţie $\bar{a}$ pe axele sistemului de coordonate de versori $\bar{\rho}$ şi $\bar{n}$, sunt:

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2, \\ a_n = 2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{r} + r \cdot \ddot{\theta}, \end{cases} \tag{3.24}$$

iar modulul său

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{r} + r\cdot\ddot{\theta}\right)^2} \,. \tag{3.25}$$

3.2.3. Sistemul de coordonate intrinseci (naturale sau triedrul lui Frenet)

Acest sistem de coordonate este un sistem mobil, triortogonal, cu originea pe curbă în punctul M, având ca axe (fig. 3.4):

- *tangenta* la curbă, de versor $\bar{\tau}$ cu sensul pozitiv în sensul de creştere al arcului s;
- *normala principală,* adică normala din planul osculator al curbei (planul limită determinat de tangenta în M şi un punct M' ce tinde către M), pozitivă spre centrul de curbură, cu versorul $\bar{\nu}$;
- *binormala,* adică normala perpendiculară pe planul osculator al cărui versor se notează cu $\bar{\beta}$, pozitiv astfel ca versorii $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ şi $\bar{\beta}$, în această ordine, să formeze un triedru drept.

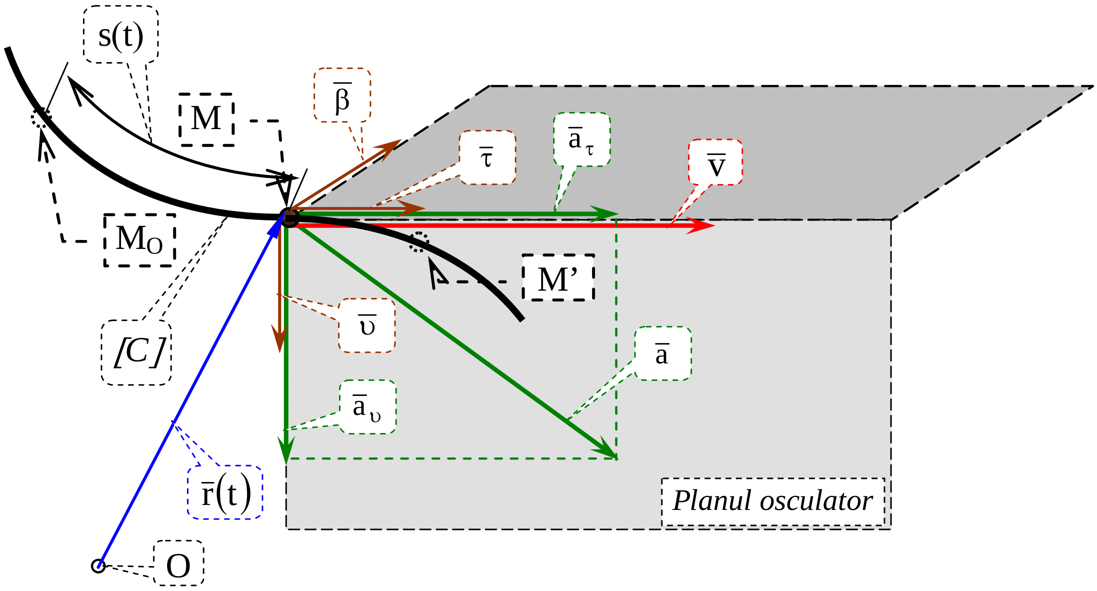


Fig. 3.4.

Utilizăm două din formulele lui Frenet şi anume:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}\,, \qquad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\cdot\bar{\nu}\,, \tag{3.26}$$

unde ρ este raza de curbură.

Cu ajutorul relaţiei de definiţie a vectorului viteză (3.7) şi a relaţiei (3.26_1), rezultă expresia vectorului viteză în sistem de coordonate intrinseci (triedrul lui Frenet):

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\overline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \overline{\tau} \cdot \dot{s} = \overline{\tau} \cdot v,$$

$$\overline{v} = \dot{s} \cdot \overline{\tau} = v \cdot \overline{\tau}, \tag{3.27}$$

Pentru stabilirea proiecţiilor vectorului acceleraţie pe axele triedrului lui Frenet, derivăm relaţia (3.27):

$$\overline{a} = \ddot{\overline{r}} = \dot{\overline{v}} = \frac{d}{dt} \cdot (v \cdot \overline{\tau}) = \dot{v} \cdot \overline{\tau} + v \cdot \dot{\overline{\tau}}, \tag{3.28}$$

şi ţinem cont de relaţia (3.26_2), astfel că:

$$\dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \overline{\nu} \cdot v. \tag{3.29}$$

Deci, cu (3.29) în (3.28), obţinem expresia vectorului acceleraţie funcţie de proiecţiile sale pe axele intrinseci:

$$\overline{a} = \dot{v} \cdot \overline{\tau} + v^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \overline{\nu}. \tag{3.30}$$

Proiecţiile vectorului acceleraţie pe axele triedrului Frenet sunt:

$$\begin{cases} a_\tau = \dot{v} \\ a_\nu = \dfrac{v^2}{\rho} \\ a_\beta = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

iar modulul

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\dot{v})^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{3.32}$$

Observaţii:

- Vectorul acceleraţie aparţine planului osculator (proiecţia vectorului acceleraţie pe axa de versor $\overline{\beta}$ este nulă).

- Acceleraţia tangenţială $\bar{a}_{\tau}$ dă informaţii în legătură cu viteza de variaţie a mărimii vectorului viteză şi poate fi pozitivă sau negativă, după cum coincide ca sens cu sensul vectorului viteză sau nu.
- Acceleraţia normală $\bar{a}_{\nu}$ dă informaţii despre viteza de variaţie a direcţiei vectorului viteză şi este orientată întotdeauna în sensul pozitiv al versorului $\bar{\nu}$ (spre centrul de curbură).

CAPITOLUL 4

Cinematica solidului rigid

4. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

4.1. Mişcarea generală a solidului rigid

4.1.1. Generalităţi

Formularea problemei: cunoscându-se mişcarea unui solid rigid în raport cu un sistem de referinţă fix se cere să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia unui punct oarecare al solidului în raport cu acest sistem de referinţă, la un moment t arbitrar ales. Pentru rezolvarea problemei alegem două sisteme de referinţă: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi al doilea mobil Oxyz solidar cu rigidul a cărei mişcare se studiază (fig. 4.1). Mişcarea sistemului de referinţă mobil Oxyz, faţă de cel fix $O_1x_1y_1z_1$, este cunoscută deoarece este cunoscută mişcarea rigidului cu care acest sistem de referinţă este solidar.

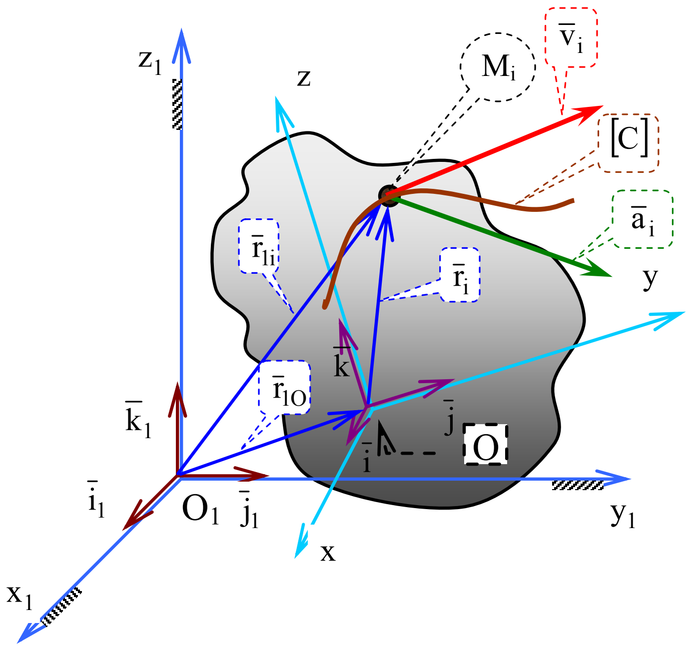


Fig. 4.1.

Cu aceste considerente, punctul M_i, unul oarecare al solidului, are o poziţie determinată invariabil faţă de sistemul de referinţă Oxyz pe toată durata mişcării. Rezultă aşadar că orice punct M_i al solidului are coordonatele x_i, y_i, z_i, în raport cu sistemul Oxyz, determinate şi constante.

Poziţia sistemului Oxyz în timpul mişcării este determinată dacă se cunoaşte vectorul de poziţie $\bar{r}_{10}$ al originii O a sistemului mobil şi poziţiile axelor acestui sistem adică versorii axelor acestuia $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Poziţia rigidului fiind variabilă în timp şi invariabilă faţă de sistemul Oxyz, patru funcţii vectoriale de timp vor determina mişcarea rigidului faţă de sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$:

$$\bar{r}_{10} = \bar{r}_{10}(t); \quad \bar{i} = \bar{i}(t); \quad \bar{j} = \bar{j}(t); \quad \bar{k} = \bar{k}(t). \tag{4.1}$$

Ultimele trei funcţii vectoriale din relaţiile (4.1) trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=1;\quad \bar{j}\cdot\bar{j}=1;\quad \bar{k}\cdot\bar{k}=1;\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=0;\quad \bar{j}\cdot\bar{k}=0;\quad \bar{k}\cdot\bar{i}=0. \qquad (4.2),$$
(4.3)

Într-adevăr, vectorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ fiind versori justifică condiţiile (4.2) şi întrucât aparţin unor axe triortogonale drepte se justifică şi condiţiile (4.3).

Rezultă, aşadar că din cele 12 necunoscute scalare corespunzătoare celor patru vectori (4.1), rămân doar şase independente şi astfel poziţia unui solid rigid faţă de un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ depinde (este determinată) de şase parametrii scalari independenţi adică are şase grade de libertate.

4.1.2. Derivata unui vector dat prin proiecţii pe axele unui sistem de referinţă mobil

Considerăm un vector $\bar{u}(t)$ dat prin proiecţiile sale $u_x(t)$, $u_y(t)$ şi $u_z(t)$ pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz:

$$\bar{u}(t)=u_x(t)\cdot\bar{i}+u_y(t)\cdot\bar{j}+u_z(t)\cdot\bar{k} \qquad (4.4)$$

Derivând în raport cu timpul relaţia (4.4), obţinem:

$$\dot{\bar{u}}=\dot{u}_x\cdot\bar{i}+\dot{u}_y\cdot\bar{j}+\dot{u}_z\cdot\bar{k}+u_x\cdot\dot{\bar{i}}+u_y\cdot\dot{\bar{j}}+u_z\cdot\dot{\bar{k}}, \qquad (4.5)$$

unde versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ sunt constanţi în mărime, dar variabili în direcţie.

Exprimăm derivatele acestor versori în funcţie de proiecţiile lor pe axele sistemului mobil de coordonate:

$$\begin{cases}\dot{\bar{i}}=\left(\dot{\bar{i}}\cdot\bar{i}\right)\cdot\bar{i}+\left(\dot{\bar{i}}\cdot\bar{j}\right)\cdot\bar{j}+\left(\dot{\bar{i}}\cdot\bar{k}\right)\cdot\bar{k}\\ \dot{\bar{j}}=\left(\dot{\bar{j}}\cdot\bar{i}\right)\cdot\bar{i}+\left(\dot{\bar{j}}\cdot\bar{j}\right)\cdot\bar{j}+\left(\dot{\bar{j}}\cdot\bar{k}\right)\cdot\bar{k}\\ \dot{\bar{k}}=\left(\dot{\bar{k}}\cdot\bar{i}\right)\cdot\bar{i}+\left(\dot{\bar{k}}\cdot\bar{j}\right)\cdot\bar{j}+\left(\dot{\bar{k}}\cdot\bar{k}\right)\cdot\bar{k}\end{cases} \qquad (4.6)$$

Derivând relaţiile (4.2) şi (4.3) obţinem:

$$2\cdot\dot{\bar{i}}\cdot\bar{i}=0;\quad 2\cdot\dot{\bar{j}}\cdot\bar{j}=0;\quad 2\cdot\dot{\bar{k}}\cdot\bar{k}=0 \qquad (4.7)$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{i}}\cdot\bar{j}=-\bar{i}\cdot\dot{\bar{j}}=\omega_z\\ \dot{\bar{j}}\cdot\bar{k}=-\bar{j}\cdot\dot{\bar{k}}=\omega_x\\ \dot{\bar{k}}\cdot\bar{i}=-\bar{k}\cdot\dot{\bar{i}}=\omega_y\end{cases} \qquad (4.8)$$

Notaţiile introduse în ultimele relaţii, în mecanică reprezintă proiecţiile vectorului viteză unghiulară pe axele unui sistem de coordonate mobil. Sub formă vectorială se scrie: $\overline{\omega} = \omega_x \cdot \overline{i} + \omega_y \cdot \overline{j} + \omega_z \cdot \overline{k}$

Dacă introducem în relaţiile (4.6) relaţiile (4.7) şi (4.8), atunci obţinem:

$$\begin{cases} \dot{\overline{i}} = \omega_z \cdot \overline{j} - \omega_y \cdot \overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \dot{\overline{j}} = \omega_z \cdot \overline{i} + \omega_x \cdot \overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\ \dot{\overline{k}} = \omega_y \cdot \overline{i} - \omega_x \cdot \overline{j} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{cases} \tag{4.9}$$

deci $\begin{cases} \dot{\overline{i}} = \overline{\omega} \times \overline{i} \\ \dot{\overline{j}} = \overline{\omega} \times \overline{j} \\ \dot{\overline{k}} = \overline{\omega} \times \overline{k} \end{cases}$, numite şi ***relaţiile lui Poisson.*** (4.10)

Introducem expresiile derivatelor versorilor sistemului mobil, date de relaţiile (4.10), în expresia derivatei în raport cu timpul (4.5) a vectorului $\overline{u}(t)$ şi obţinem:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{u}} &= \frac{d\overline{u}}{dt} = \\ &= \dot{u}_x \cdot \overline{i} + \dot{u}_y \cdot \overline{j} + \dot{u}_z \cdot \overline{k} + u_x \cdot (\overline{\omega} \times \overline{i}) + u_y \cdot (\overline{\omega} \times \overline{j}) + u_z \cdot (\overline{\omega} \times \overline{k}) = \\ &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \left(u_x \cdot \overline{i} + u_y \cdot \overline{j} + u_z \cdot \overline{k}\right), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\overline{u}}{dt} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{u}, \tag{4.11}$$

în care:

$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \dot{u}_x \cdot \overline{i} + \dot{u}_y \cdot \overline{j} + \dot{u}_z \cdot \overline{k}$, este *derivata relativă (locală),* vectorul care are proiecţiile pe axele sistemului mobil $Oxyz$ egale cu derivatele în raport cu timpul ale proiecţiilor vectorului $\overline{u}$ pe axele aceluiaşi sistem de coordonate mobil:

$\frac{d\bar{u}}{dt}$, este *derivata absolută,* vectorul a cărui proiecţii pe axele sistemului fix sunt egale cu derivatele în raport cu timpul a proiecţiilor vectorului $\bar{u}$ pe axele aceluiaşi sistem de coordonate fix.

4.1.3. Traiectorii

Din figura 4.1 se poate scrie relaţia vectorială de legătură între vectorul de poziţie $\bar{r}_{1i}$ al punctului M_i în raport cu sistemul de referinţă fix, vectorul de poziţie $\bar{r}_{1O}$ al originii sistemului de referinţă mobil O faţă de cel fix şi vectorul de poziţie al punctului M_i în raport cu sistemul de referinţă mobil, adică:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{1O} + \bar{r}_i, \tag{4.12}$$

unde
$$\begin{cases} \bar{r}_{1i} = x_{1i} \cdot \bar{i}_1 + y_{1i} \cdot \bar{j}_1 + z_{1i} \cdot \bar{k}_1, \\ \bar{r}_{1O} = x_{1O} \cdot \bar{i}_1 + y_{1O} \cdot \bar{j}_1 + z_{1O} \cdot \bar{k}_1, \\ \bar{r}_i = x_i \cdot \bar{i} + y_i \cdot \bar{j} + z_i \cdot \bar{k}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei [*C*] punctului M_i se obţin proiectând relaţia (4.12), utilizând şi (4.13), pe axele sistemului de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, adică:

$$\begin{cases} x_{1i} = x_{1O} + x_i \cdot \cos(\bar{i}, \bar{i}_1) + y_i \cdot \cos(\bar{j}, \bar{i}_1) + z_i \cdot \cos(\bar{k}, \bar{i}_1) \\ y_{1i} = y_{1O} + x_i \cdot \cos(\bar{i}, \bar{j}_1) + y_i \cdot \cos(\bar{j}, \bar{j}_1) + z_i \cdot \cos(\bar{k}, \bar{j}_1) \\ z_{1i} = z_{1O} + x_i \cdot \cos(\bar{i}, \bar{k}_1) + y_i \cdot \cos(\bar{j}, \bar{k}_1) + z_i \cdot \cos(\bar{k}, \bar{k}_1) \end{cases} \tag{4.14}$$

4.1.4. Distribuţia de viteze şi acceleraţii

Distribuţia de viteze.

Prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (4.12) se obţine:

$$\dot{\bar{r}}_{1i} = \dot{\bar{r}}_{1O} + \dot{\bar{r}}_i, \tag{4.15}$$

unde $\dot{\bar{r}}_{1i} = \bar{v}_i$ şi $\dot{\bar{r}}_{1O} = \bar{v}_O$ reprezintă vitezele punctului M_i şi respectiv a originii triedrului Oxyz corespunzătoare unui moment oarecare din timpul mişcării solidului. În privinţa vectorului $\bar{r}_i$ se constată că este definit prin proiecţiile lui pe axele unui sistem de referinţă mobil (solidar cu rigidul) şi prin urmare derivata sa se calculează cu relaţia (4.11), adică:

$$\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i. \tag{4.16}$$

Deoarece vectorul de poziţie $\bar{r}_i = x_i \cdot \bar{i} + y_i \cdot \bar{j} + z_i \cdot \bar{k}$ are proiecţiile pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz (solidar cu rigidul nedeformabil), derivatele acestora în raport cu timpul sunt nule, ceeace face ca relaţia (4.16) să devină:

$$\dot{\bar{r}}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i , \tag{4.17}$$

iar relaţia (4.15) se transformă corespunzător în:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_i \quad , \tag{4.18}$$

numită *relaţia lui Euler pentru distribuţia vitezelor* într-un rigid.

Proiectând relaţia (4.18) pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz, pregătind în prealabil vectorii componenţi, adică:

$$\bar{v}_i = v_{ix} \cdot \bar{i} + v_{iy} \cdot \bar{j} + v_{iz} \cdot \bar{k}, \quad \bar{v}_O = v_{Ox} \cdot \bar{i} + v_{Oy} \cdot \bar{j} + v_{Oz} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix},$$

se obţin proiecţiile vectorului viteză pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz, sub forma (4.19):

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{ix} = v_{Ox} + z_i \cdot \omega_y - y_i \cdot \omega_z \\ v_{iy} = v_{Oy} + x_i \cdot \omega_z - z_i \cdot \omega_x \\ v_{iz} = v_{Oz} + y_i \cdot \omega_x - x_i \cdot \omega_y \end{cases} \tag{4.19}$$

Observaţie

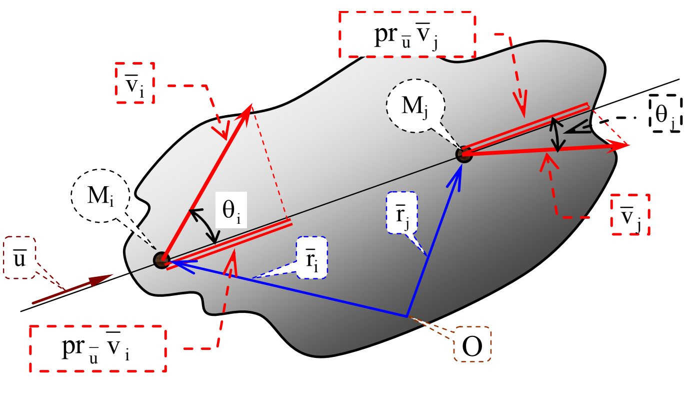


Fig. 4.2.

Proiecţiile vitezelor a două puncte ale unui solid rigid în mişcarea generală, pe direcţia determinată de cele două puncte, sunt egale între ele (fig. 4.2).

Aplicăm relaţia lui Euler pentru punctele M_i şi M_j:

$$\begin{cases} \bar{v}_i = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_i , \\ \bar{v}_j = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_j . \end{cases}$$

Scăzând cele două relaţii obţinem:

$$\bar{v}_i - \bar{v}_j = \bar{\omega} \times \overline{M_j M_i} \quad \text{sau} \quad \bar{v}_i = \bar{v}_j + \bar{\omega} \times \overline{M_j M_i} \quad \Big| \cdot \overline{M_j M_i}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{v}_i \cdot \overline{M_jM_i} = \overline{v}_j \cdot \overline{M_jM_i} + \left(\overline{\omega} \times \overline{M_jM_i}\right) \cdot \overline{M_jM_i}$$

Ultimul termen (produsul mixt) din membrul doi este nul, ceeace conduce la relaţia:

$$\left|\overline{v}_i\right| \cdot \left|\overline{M_jM_i}\right| \cdot \cos\theta_i = \left|\overline{v}_j\right| \cdot \left|\overline{M_jM_i}\right| \cdot \cos\theta_j$$

sau după împărţire cu $\left|\overline{M_jM_i}\right|$, avem

$$\left|\overline{v}_i\right| \cdot \cos\theta_i = \left|\overline{v}_j\right| \cdot \cos\theta_j . \tag{4.20}$$

Distribuţia de acceleraţii.

Prin derivare în raport cu timpul a relaţiei lui Euler de distribuţie a vitezelor (4.18) se obţine:

$$\dot{\overline{v}}_i = \dot{\overline{v}}_O + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{r}_i + \overline{\omega} \times \dot{\overline{r}}_i , \tag{4.21}$$

unde

$\dot{\overline{v}}_i = \overline{a}_i$ este acceleraţia punctului M_i;

$\dot{\overline{v}}_O = \overline{a}_O$ este acceleraţia originii sistemului de referinţă mobil $Oxyz$;

$\dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon}$ este acceleraţia unghiulară a sistemului de referinţă mobil $Oxyz$, deci şi a rigidului care este solidar cu sistemul mobil.

Deasemeni, în privinţa vectorului $\overline{r}_i$ se constată că este definit prin proiecţiile lui pe axele unui sistem de referinţă mobil (solidar cu rigidul) şi prin urmare derivata sa se calculează cu relaţia (4.11), în forma:

$$\dot{\overline{r}}_i = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{r}_i , \tag{4.16}$$

iar vectorul de poziţie $\overline{r}_i = x_i \cdot \overline{i} + y_i \cdot \overline{j} + z_i \cdot \overline{k}$ având proiecţiile pe axele sistemului de referinţă mobil $Oxyz$ (solidar cu rigidul nedeformabil), derivatele acestora în raport cu timpul sunt nule, ceeace face ca relaţia (4.16) să devină:

$$\dot{\overline{r}}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i , \tag{4.17}$$

iar relaţia (4.21) se transformă corespunzător în:

$$\Rightarrow \quad \overline{a}_i = \overline{a}_O + \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_i + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_i\right) \tag{4.22}$$

adică, *relaţia de distribuţie a acceleraţiilor* în mişcarea generală a solidului rigid sau **relaţia lui Rivals.**

Proiectând relaţia (4.22) pe axele sistemului de referinţă mobil $Oxyz$, pregătind în prealabil vectorii componenţi, adică:

$$\bar{a}_i = a_{ix} \cdot \bar{i} + a_{iy} \cdot \bar{j} + a_{iz} \cdot \bar{k}, \quad \bar{a}_O = a_{Ox} \cdot \bar{i} + a_{Oy} \cdot \bar{j} + a_{Oz} \cdot \bar{k}$$

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ z_i \cdot \omega_y - y_i \cdot \omega_z & x_i \cdot \omega_z - z_i \cdot \omega_x & y_i \cdot \omega_x - x_i \cdot \omega_y \end{vmatrix}$$

se obţin proiecţiile vectorului acceleraţie pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz, sub forma (4.23):

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{ix} = a_{Ox} + z_i \cdot \varepsilon_y - y_i \cdot \varepsilon_z + \omega_y \cdot (y_i \cdot \omega_x - x_i \cdot \omega_y) - \omega_z \cdot (x_i \cdot \omega_z - z_i \cdot \omega_x) \\ a_{iy} = a_{Oy} + x_i \cdot \varepsilon_z - z_i \cdot \varepsilon_x + \omega_z \cdot (z_i \cdot \omega_y - y_i \cdot \omega_z) - \omega_x \cdot (y_i \cdot \omega_x - x_i \cdot \omega_y) \\ a_{iz} = a_{Oz} + y_i \cdot \varepsilon_x - x_i \cdot \varepsilon_y + \omega_x \cdot (x_i \cdot \omega_z - z_i \cdot \omega_x) - \omega_y \cdot (z_i \cdot \omega_y - y_i \cdot \omega_z) \end{cases} \quad (4.23)$$

Apl. 4.1.

Braţul CB se roteşte cu viteză unghiulară constantă în poziţia considerată în fig. Apl-4.1, $\omega_1 = 6$ rad/s, în jurul unei axe orizontale. Tija AB este legată prin intermediul a două articulaţii sferice A şi B de braţele DA şi CB. Pentru poziţia mecanismului din figură, se cere să se determine viteza unghiulară ω_2 a braţului DA şi viteza unghiulară ω_n a tijei AB.

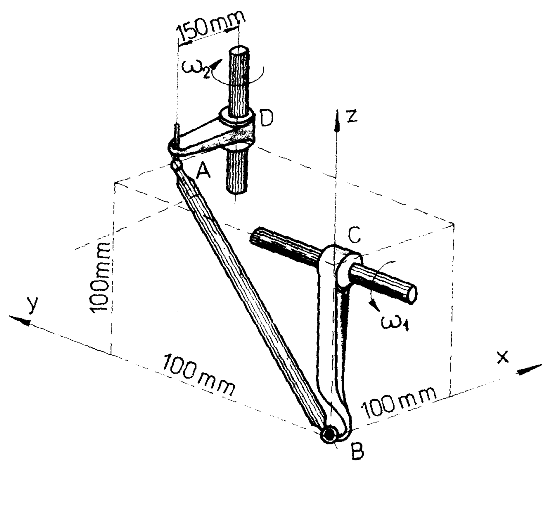


Fig. Apl-4.1.

R:

Viteza unghiulară a braţului BC este:

$$\bar{\omega} = -6 \cdot \bar{j} \text{ [rad/s]}$$

Viteza punctului B va fi:

$$\overline{v}_B = \overline{\omega}_1 \times \overline{BC} = 600 \cdot \overline{i}\ [\text{mm/s}]$$

Viteza punctului A va fi:

$$\overline{v}_A = \overline{\omega}_2 \times \overline{DA} = 600 \cdot \overline{i}\ [\text{mm/s}]$$

$$\overline{\omega}_2 = -\omega_2 \cdot \overline{k} \qquad \Rightarrow v_A = 50 \cdot \omega_2 \cdot \overline{j}$$

Formula lui Euler care leagă vitezele a două puncte ale unui rigid aplicată punctelor A şi B ne dă:

$$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}_n x \overline{BA}, \quad \text{in care } \overline{BA} = 50 \cdot \overline{i} + 100 \cdot \overline{j} + 100 \cdot \overline{k}$$

Înlocuind vom avea:

$$50 \cdot \omega_2 \cdot \overline{j} = 600 \cdot \overline{i} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_{nx} & \omega_{ny} & \omega_{nz} \\ 50 & 100 & 100 \end{vmatrix}$$

şi apoi identificând obţinem sistemul:

$$\begin{cases} -6 = \omega_{ny} - \omega_{nz} \\ \omega_2 = -2 \cdot \omega_{nx} + \omega_{nz} \\ 0 = 2 \cdot \omega_{nx} - \omega_{ny} \end{cases}$$

Prin adunare membru cu membru rezultă:

$$\omega_2 = 6\,[\text{rad/s}]. \qquad \blacklozenge$$

Pentru a găsi $\overline{\omega}_n$ avem nevoie de încă o relaţia care se obţine ştiind că $\overline{\omega}_n$ este perpendicular pe $\overline{BA}$.

Rezultă $\overline{\omega}_n \cdot \overline{BA} = 0;$ adică:

$$50 \cdot \omega_{nx} \cdot \overline{i} + 100 \cdot \omega_{ny} \cdot \overline{j} + 100 \cdot \omega_{nz} \cdot \overline{k} = 0$$

Această relaţie, împreună cu sistemul de mai sus ne dau soluţiile:

$$\omega_{nx} = -4/3\ [\text{rad/s}];\ \omega_{ny} = -8/3\ [\text{rad/s}];\ \omega_{nz} = 10/3\ [\text{rad/s}].$$

adică:

$$\overline{\omega}_n = \frac{2}{3} \cdot \left(-2 \cdot \overline{i} - 4 \cdot \overline{j} + 5 \cdot \overline{k}\right)\ [\text{rad/s}] \qquad \blacklozenge$$

cu $\left|\overline{\omega}_n\right| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} = 2 \cdot \sqrt{5}\ [\text{rad/s}]$. ♦

Apl. 4.2. Culisa B a mecanismului spaţial din figura Apl-4.2 are o mişcare rectilinie, cu viteză constantă de-a lungul axei Ox, v_B = 4 m/s. În momentul considerat distanţa OB = 0,3 m, iar A'A = 0,2 m. Să se determine viteza culisei A, care se mişcă pe o direcţie paralelă cu axa Oy, în poziţia din figură.

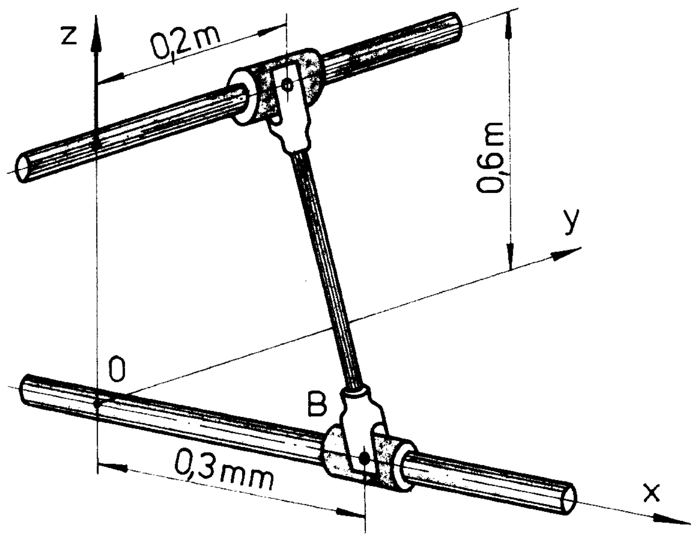


Fig. Apl-4.2.

R: Distanţa AB fiind constantă, avem:

A(0; y_A; 0,6) şi B(x_B; 0; 0); $AB^2 = x_B^2 + y_A^2 + 0{,}6^2 = L_{AB}^2$.

Derivăm relaţia în raport cu timpul şi obţinem:

$$2 \cdot \dot{x}_B \cdot x_B + 2 \cdot \dot{y}_A \cdot y_A + 0 = 0.$$

În momentul considerat cunoaştem că:

$$x_B = 0{,}3\,\text{m};\ v_B = \dot{x}_B = 4\,\text{m/s};\ y_A = 0{,}2\,\text{m};\ \dot{y}_A = v_A.$$

Obţinem: $4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot v_A = 0$

Deci: v_A = - 6 m/s sau $\overline{v}_A = -6 \cdot \overline{j}\ [\text{m/s}]$. ♦

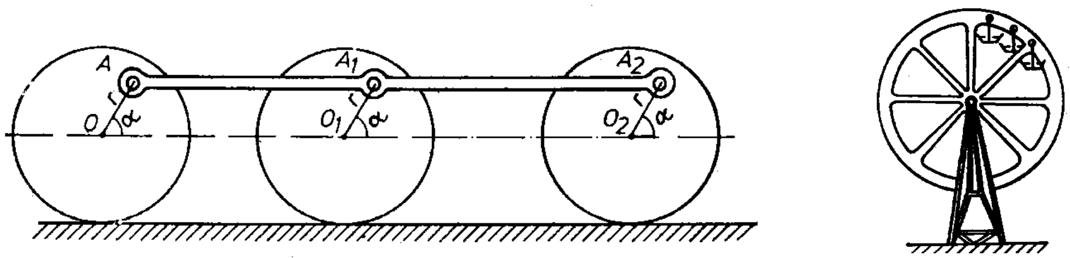
4.2. Mişcări particulare ale solidului rigid

Pentru aceste mişcări particulare ale solidului rigid ne propunem să stabilim:

- definiţia mişcării;
- poziţia solidului rigid;
- traiectoria unui punct P_i;
- viteza şi acceleraţia punctului P_i.

4.2.1. Mişcarea de translaţie

Definiţie: Un solid rigid execută o mişcare de translaţie dacă o dreaptă solidară cu el rămâne în tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi sau cu o dreaptă fixă din spaţiu.



a) ***b)***

Fig. 4.3

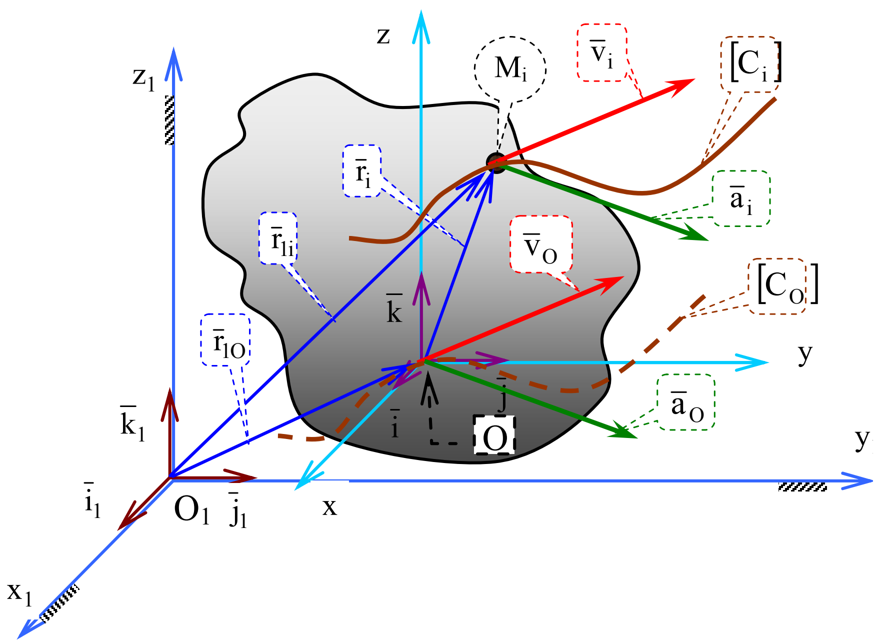


Fig. 4.4.

Exemple: mişcarea pistonului în cilindrul unui motor cu ardere internă; mişcarea bielei de legătură a unei locomotive cu abur atunci când aceasta se deplasează pe un drum drept (fig. 4.3,a); mişcarea scaunului unui scrânciob care se roteşte într-un plan vertical (fig. 4.3,b) etc.

Considerăm solidul rigid în mişcare de tran-slaţie surprins la momentul oarecare t ca în fig. 4.4.

Alegerea sistemului de axe se face în conformitate cu deplasarea (axele sistemului mobil Oxyz, solidar cu rigidul, rămân tot timpul mişcării paralele cu cele ale sistemului fix $O_1x_1y_1z_1$), adică trebuie să avem relaţiile:

$$\bar{i} = \bar{i}_1 = \overline{\text{const}}; \quad \bar{j} = \bar{j}_1 = \overline{\text{const}}; \quad \bar{k} = \bar{k}_1 = \overline{\text{const}}. \tag{4.24}$$

Din cele patru funcţii vectorile de timp (4.1) cu ajutorul cărora s-a determinat poziţia rigidului în cazul celei mai generale mişcări a solidului rigid, mai rămâne doar una în cazul mişcării de translaţie, pentru a cunoaşte în totalitate poziţia rigidului la orice moment în timp, adică:

$$\bar{r}_{1O} = \bar{r}_{1O}(t). \tag{4.25}$$

Deci, în mişcarea de translaţie solidul rigid are 3 grade de libertate, sunt necesari 3 parametrii scalari de poziţie şi anume proiecţiile pe axele sistemului fix ale vectorului de poziţie $\bar{r}_{1O}$ al originii sistemului de referinţă mobil în raport cu cel fix.

Traiectoria $[C_i]$ *a punctului* P_i.

Din schiţă putem scrie relaţia ce leagă cei trei vectori de poziţie:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{1O} + \bar{r}_i. \tag{4.26}$$

Proiectând relaţia (4.26) pe axele sistemului de coordonate fix $O_1x_1y_1z_1$, obţinem *ecuaţiile parametrice ale traiectoriei* punctului P_i de forma (4.27):

$$\begin{cases} x_{1i} = x_{1O} + x_i \\ y_{1i} = y_{1O} + y_i \\ z_{1i} = z_{1O} + z_i \end{cases} \tag{4.27}$$

Traiectoria $[C_i]$ punctului P_i este paralelă cu traiectoria $[C_O]$ a originii O a sistemului mobil şi identică cu aceasta ca formă (x_i, y_i, z_i sunt constante).

Viteza $\bar{v}_i$ *şi acceleraţia* $\bar{a}_i$ *ale punctului* P_i.

Derivăm în raport cu timpul relaţia (4.26):

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{1O} + \bar{r}_i\right] \;\Rightarrow\; \dot{\bar{r}}_{1i} = \dot{\bar{r}}_{1O} + \dot{\bar{r}}_i, \tag{4.28}$$

unde: $\dot{\bar{r}}_{1i} = \bar{v}_i$ - este viteza punctului P_i;

$\dot{\bar{r}}_{1O} = \bar{v}_O$ - este viteza originii sistemului de referinţă mobil O;

$\dot{\bar{r}}_i = \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ - este derivata vectorului de poziţie $\bar{r}_i$ al punctului P_i, vector dat prin proiecţii constante în sistemul de referinţă mobil, ceeace face ca derivata relativă (locală) să fie nulă.

Din relaţiile (4.8), având în vedere şi relaţiile (4.24), se obţine:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \omega_z, \\ \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = \omega_x, \\ \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = \omega_y, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \omega_z = 0, \\ \omega_x = 0, \\ \omega_y = 0. \end{cases}$$

Deci viteza unghiulară ($\bar{\omega} = \omega_x \cdot \bar{i} + \omega_y \cdot \bar{j} + \omega_z \cdot \bar{k} = 0$) este nulă şi cu atât mai mult acceleraţia unghiulară ($\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0$).

Din relaţia (4.28), cu aceste observaţii, rezultă relaţia distribuţiei de viteze în mişcarea de translaţie:

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_i = \bar{v}_O \tag{4.29}$$

şi a distribuţiei de acceleraţii prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (4.29):

$$\Rightarrow \quad \bar{a}_i = \bar{a}_O \tag{4.30}$$

În mişcarea de translaţie traiectorile punctelor solidului rigid sunt identice şi paralele între ele, iar vitezele respectiv acceleraţiile tuturor punctelor rigidului, la un moment oarecare t, sunt egale între ele.

4.2.2. Mişcarea de rotaţie cu axă fixă

Definiţie: Un solid rigid execută o mişcare de rotaţie cu axă fixă dacă cel puţin două puncte ale sale rămân pe tot timpul mişcării suprapuse cu două puncte fixe din spaţiu.

Pentru studiul mişcării de rotaţie a unui solid rigid în jurul unei axe fixe, alegem două sisteme de referinţă, unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi altul mobil Oxyz astfel încât acestea să aibă originea comună $O_1 \equiv O$ şi axa de rotaţie confundată cu $O_1z_1 \equiv Oz$.

Sistemele de referinţă fiind alese astfel şi mişcarea având particularităţile specificate, cele patru funcţii vectoriale necesare studiului mişcării rigidului (4.1), se transformă în mod corespunzător:

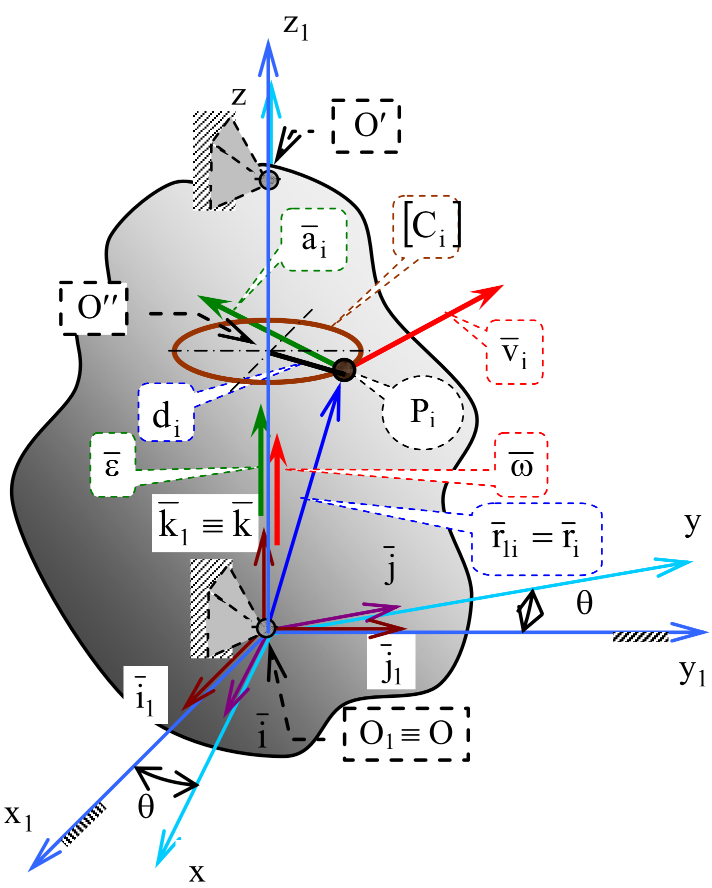


Fig. 4.5.

$$\begin{cases} \bar{r}_{1O} = 0, \\ \bar{i} = \cos\theta \cdot \bar{i}_1 + \sin\theta \cdot \bar{j}_1, \\ \bar{j} = -\sin\theta \cdot \bar{i}_1 + \cos\theta \cdot \bar{j}_1 \\ \bar{k} = \bar{k}_1 = \overline{const.} \end{cases} \tag{4.31}$$

Deci, poziţia solidului rigid în mişcarea de rotaţie cu axă fixă este determinată de un singur parametru scalar şi anume unghiul $\theta = \theta(t)$, ceeace indică un singur grad de libertate al rigidului.

Traiectoria $[C_i]$ *a punctului* P_i.

Din schiţă, prin modul de alegere a sistemelor de axe, avem:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_i, \tag{4.32}$$

care proiectată pe axele sistemului fix de coordonate $O_1x_1y_1z_1$ conduce la ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului P_i:

$$\begin{cases} x_{1i} = x_i \cdot \cos\theta - y_i \cdot \sin\theta, \\ y_{1i} = x_i \cdot \sin\theta + y_i \cdot \cos\theta, \\ z_{1i} = z_i. \end{cases} \tag{4.33}$$

Eliminând parametrul θ obţinem din ecuaţiile parametrice (4.33), ecuaţia traiectoriei:

$$x_{1i}^2 + y_{1i}^2 = x_i^2 + y_i^2 = d_i^2, \tag{4.34}$$

ecuaţia unui cerc cu rază d_i şi centru pe axa de rotaţie. Deci traiectorile tuturor punctelor rigidului sunt cercuri plasate în plane perpendiculare pe axa de rotaţie de rază d_i.

Distribuţia de viteze şi acceleraţii

Prin derivare în raport cu timpul a relaţiei (4.32) se obţine:

$$\dot{\bar{r}}_{1i} = \dot{\bar{r}}_i, \tag{4.35}$$

unde $\dot{\bar{r}}_{1i} = \bar{v}_i$, este viteza punctului P_i;

$\dot{\bar{r}}_i = \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$, este derivata unui vector dat prin proiecţii pe axele unui sistem de referinţă mobil (Oxyz), cu $\dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0$ deoarece $\left|\bar{r}_i\right| = \text{const.}$ şi deci vectorul de poziţie $\bar{r}_i$ variază numai în direcţie.

Cu aceste observaţii relaţia distribuţiei de viteze în mişcarea de rotaţie cu axă fixă este:

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i. \tag{4.36}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţiile (4.31):

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} = \dot{\theta} \cdot \left(-\sin\theta \cdot \bar{i}_1 + \cos\theta \cdot \bar{j}_1\right) = \dot{\theta} \cdot \bar{j}, \\ \dot{\bar{j}} = \dot{\theta} \cdot \left(-\cos\theta \cdot \bar{i}_1 - \sin\theta \cdot \bar{j}_1\right) = -\dot{\theta} \cdot \bar{i}, \\ \dot{\bar{k}} = 0. \end{cases} \tag{4.37}$$

Din relaţiile (4.8), având în vedere şi relaţiile (4.37), se obţine:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = 0, \\ \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = 0, \\ \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \cdot \bar{j} \cdot \bar{j} = \dot{\theta}, \end{cases} \tag{4.38}$$

respectiv $\quad \bar{\omega} = \dot{\theta} \cdot \bar{k} = \omega \cdot \bar{k}, \qquad (4.39)$

ceea ce arată că vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ este dirijat după direcţia axei de rotaţie.

Exprimăm, cu ajutorul determinanţilor relaţia distribuţiei de viteze (4.36) în mişcarea de rotaţie cu axă fixă şi obţinem:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= v_{ix} \cdot \bar{i} + v_{iy} \cdot \bar{j} + v_{iz} \cdot \bar{k} = \\ &= \bar{\omega} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \left(-\omega \cdot y_i\right) \cdot \bar{i} + \left(\omega \cdot x_i\right) \cdot \bar{j}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Proiectând relaţia (4.40) pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz obţinem proiecţiile vectorului viteză pe axele acestui sistem, adică:

$$\begin{cases} v_{ix} = -\omega \cdot y_i, \\ v_{iy} = \omega \cdot x_i, \\ v_{iz} = 0, \end{cases} \tag{4.41}$$

modulul $|\overline{v}_i| = \sqrt{v_{ix}^{\ 2} + v_{iy}^{\ 2}} = \omega \cdot \sqrt{x_i^{\ 2} + y_i^{\ 2}} = \omega \cdot d_i$. (4.42)

Derivând în raport cu timpul relaţia (4.36) se obţine expresia distribuţiei de acceleraţii în mişcarea de rotaţie cu axă fixă:

$$\dot{\overline{v}}_i = \dot{\overline{\omega}} \times \overline{r}_i + \overline{\omega} \times \dot{\overline{r}}_i,$$

unde: $\dot{\overline{v}}_i = \overline{a}_i$, este acceleraţia punctului P_i;

$$\dot{\overline{r}}_i = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{r}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i;$$

$\dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon} = \ddot{\theta} \cdot \overline{k} = \varepsilon \cdot \overline{k}$, este vectorul acceleraţie unghiulară a sistemului de referinţă mobil solidar cu solidul rigid, evident şi a rigidului, care are direcţia axei de rotaţie.

$$\Rightarrow \quad \overline{a}_i = \varepsilon \times \overline{r}_i + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}_i). \tag{4.43}$$

Exprimăm, cu ajutorul determinanţilor relaţia distribuţiei de acceleraţii (4.43) în mişcarea de rotaţie cu axă fixă şi obţinem:

$$\overline{a}_i = a_{ix} \cdot \overline{i} + a_{iy} \cdot \overline{j} + a_{iz} \cdot \overline{k} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_i + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}_i) =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot x_i & \omega \cdot y_i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a}_i = \left(-\varepsilon \cdot y_i - \omega^2 \cdot x_i\right) \cdot \overline{i} + \left(\varepsilon \cdot x_i - \omega^2 \cdot y_i\right) \cdot \overline{j}. \tag{4.44}$$

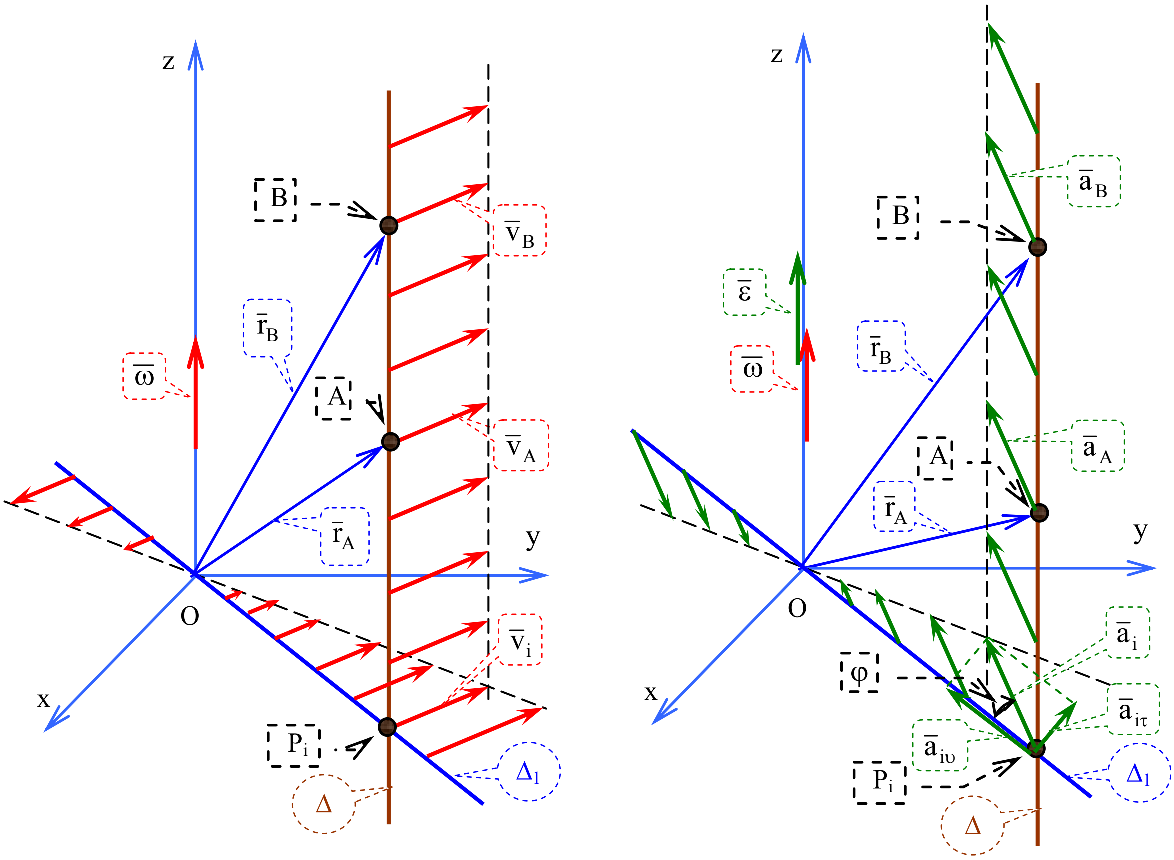
Proiectând relaţia (4.44) pe axele sistemului mobil Oxyz obţinem proiecţiile vectorului acceleraţie pe axele sistemului mobil:

$$\begin{cases} a_{ix} = -\varepsilon \cdot y_i - \omega^2 \cdot x_i \\ a_{iy} = \varepsilon \cdot x_i - \omega^2 \cdot y_i \\ a_{iz} = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

respectiv modulul acceleraţiei:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\varepsilon^2 \cdot \left(x_i^{\ 2} + y_i^{\ 2}\right) + \omega^4 \cdot \left(x_i^{\ 2} + y_i^{\ 2}\right)} = d_i \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{4.46}$$

Relaţiile (4.41) şi (4.45) arată că vectorul viteză şi vectorul acceleraţie sunt conţinuţi în plane perpendiculare pe axa de rotaţie (componentele lor pe axa Oz sunt nule). Dacă exprimăm vectorul acceleraţie într-un sistem de coordonate intrinseci, atunci componentele lui vor fi:



a) ***b)***

Fig. 4.6.

$$\begin{cases} a_\tau = \dot{v}, \\ a_\nu = \dfrac{v^2}{\rho}, \\ a_\beta = 0, \end{cases} \qquad \text{iar pentru } \rho = d_i \text{ avem } \qquad \begin{cases} a_\tau = \dfrac{d}{dt}(\omega \cdot d_i) = \varepsilon \cdot d_i, \\ a_\nu = \dfrac{(\omega \cdot d_i)^2}{d_i} = \omega^2 \cdot d_i, \\ a_\beta = 0. \end{cases}$$

În modul acceleraţia este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_\nu{}^2} = d_i \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Unghiul dintre vectorul acceleraţie şi componenta normală este (fig. 4.6,b):

$$\mathrm{tg}(\varphi_i) = \frac{a_\tau}{a_v} = \frac{\varepsilon \cdot d_i}{\omega^2 \cdot d_i} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (4.47)$$

Proprietăţile distribuţiei de viteze şi de acceleraţii în mişcarea de rotaţie cu axă fixă (fig. 4.6):

a) Vitezele şi acceleraţiile punctelor solidului rigid aparţinând axei de rotaţie sunt nule.

b) Vitezele şi acceleraţiile punctelor solidului rigid sunt conţinute în plane perpendiculare pe axa de rotaţie (v_z=0, a_z=0).

c) Toate punctele solidului rigid aparţinând unei drepte (Δ) paralelă cu axa de rotaţie au aceleaşi viteze şi aceleaşi acceleraţii.

d) Vitezele şi acceleraţiile punctelor solidului rigid plasate pe o dreaptă (Δ_1) perpendiculară pe axa de rotaţie au variaţie liniară în raport cu poziţia lor pe această dreaptă faţă de axa de rotaţie.

Apl. 4.3.

Se consideră troliul din figura Apl-4.3, utilizat pentru ridicarea unei greutăţi. Conside-rând că motorul electric are la pornire o mişcare uniform accelerată, iar la oprire o mişcare uniform încetinită, având timpii de accelerare şi decelerare egali $t_p = t_0 = 8$ s, să se determine:

a) raportul de transmisie de la motor la tamburul troliului;

b) viteza unghiulară de regim a tamburului;

c) acceleraţia unghiulară a tamburului la oprirea şi pornirea motorului;

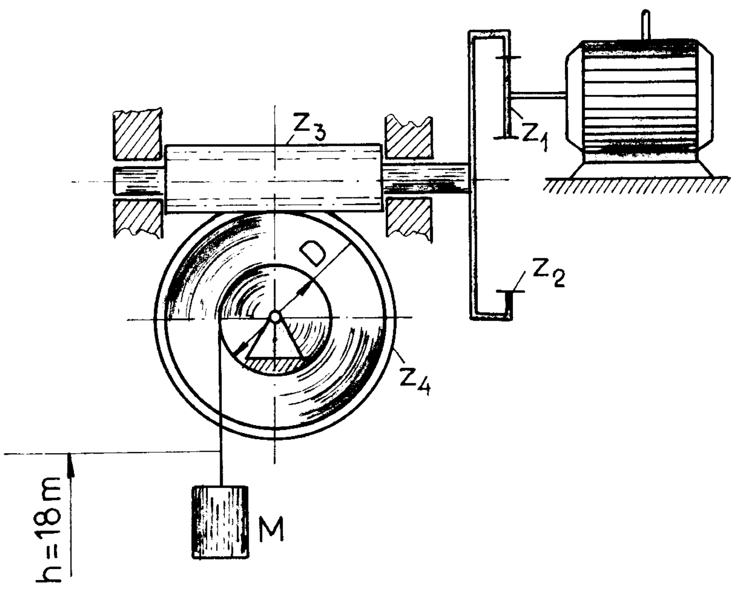


Fig. Apl-4.3.

d) timpul necesar pentru ridicarea greutăţii M la înălţimea h = 18 m, dacă motorul porneşte din repaus şi se opreşte la capătul cursei h.

Se cunosc: z_1 = 20, z_2 = 80 şi z_3 = 2 începuturi; z_4 = 30; D = 200 mm ; turaţia de regim n_r = 3000 rot/min.

R:

a) Raportul total de transmitere este:

$$i_{tot} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \frac{z_2}{z_1} \cdot 1 \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{80}{20} \cdot 1 \cdot \frac{30}{2} = 60 \qquad \blacklozenge$$

b) Viteza unghiulară ω_1 este:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 3000}{30} = 100 \cdot \pi \left[s^{-1}\right] \text{ şi } \ i_{tot} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = 60$$

$$\Rightarrow \omega_4 = \frac{\omega_1}{60} = \frac{100 \cdot \pi}{60} = 5{,}23 \left[s^{-1}\right]. \qquad \blacklozenge$$

c) $\omega_4 = \varepsilon_4 \cdot t$, de unde:

$$\varepsilon_4 = \frac{\omega_4}{t} = \frac{5{,}23}{8} = 0{,}654 \left[s^{-2}\right]. \qquad \blacklozenge$$

d) În perioada de accelerare greutatea M va parcurge o distanţă $S_1 = \theta_1 \cdot R$.

$$t_1 = 8 \text{ s}; \quad \theta = \frac{\varepsilon_4 \cdot t^2}{2} = \frac{0{,}654 \cdot 64}{2} = 20{,}93 \ [rad]$$

$S_1 = 20{,}93 \cdot 0{,}1 = 2{,}093$ [m].

În perioada de încetinire până la oprire $t_3 = 8$ s, $S_3 = \theta_3 \cdot R$, unde:

$$\theta_3 = \omega_4 \cdot t - \frac{\varepsilon_4 \cdot t^2}{2} = \frac{\varepsilon_4 \cdot t^2}{2} \qquad \Rightarrow S_3 = 2{,}093 [m]$$

În perioada a doua mişcarea este uniformă $t_2 = S_2 / v_2$;

$S_2 = h - (S_1 + S_2)$; $\quad \Rightarrow S_2 = 18 - 4{,}186 = 13{,}814$ [m];

$v_2 = \omega_4 \cdot R = 5{,}23 \cdot 0{,}1 = 0{,}523$ [m/s].

obţinem: $t_2 = \dfrac{S_2}{v_2} = \dfrac{13{,}814}{0{,}523} = 26{,}413 [s]$

Timpul total:

$$t_{tot} = t_1 + t_2 + t_3 = 8 + 26{,}413 + 8 = 42{,}413 \text{ [s]}. \qquad \blacklozenge$$

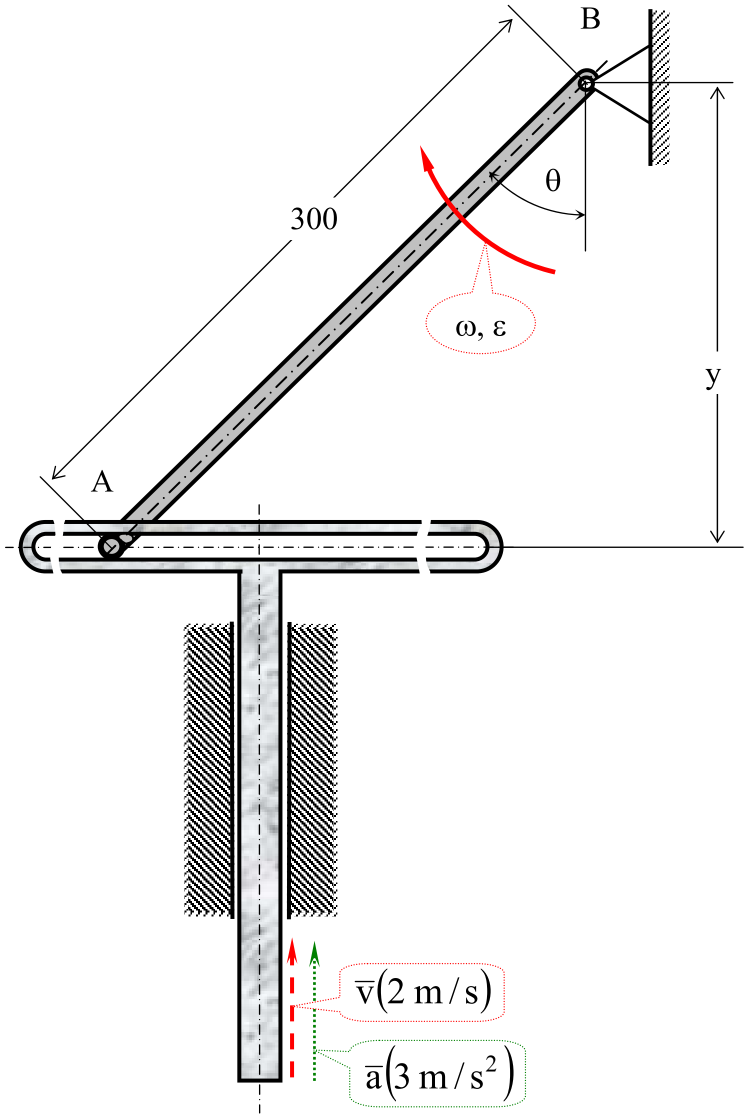


Fig. Apl-4.4

Apl. 4.4.

La momentul considerat, $\theta = 50^o$ (fig. Apl-4.4), ghidajul cu canal orizontal urcă cu accelerația $a = 3\,[m/s^2]$ și viteza $v = 2\,[m/s]$. Să se determine viteza și accelerația unghiulare ale tijei AB, la momentul considerat în figură.

Răspuns:

$\omega = 8{,}703\,[rad/s]$;

$\varepsilon = 50{,}497\,[rad/s^2]$.

Apl. 4.5

La momentul indicat în figura A7-21, $\theta = 60^o$ și bara AB are decelerația $a = 4\,[m/s^2]$ și viteza $v = 8\,[m/s]$.

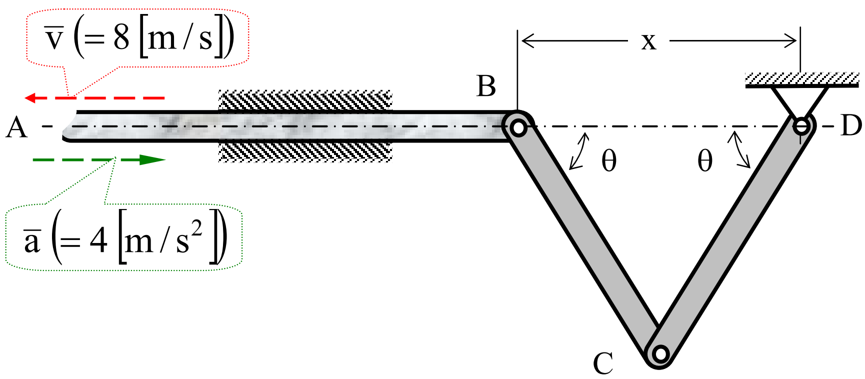


Fig. Apl-4.5

Lungimile barelor sunt: $L_{BC} = L_{CD} =$

$= 300\,[mm]$

Să se determine viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale barei CD la momentul considerat.

Răspuns:
$\omega = -15,4 \left[rad / s \right] \varepsilon = -129,16 \left[rad / s^2 \right]$.

Apl. 4.6

Blocul $\boldsymbol{S}$ este ridicat hidraulic astfel că rola A se deplasează către ştiftul (articulaţia cilin-drică) B (fig. Apl-4.6). Dacă A se apropie de B cu viteza $v = 5 \left[m/s \right]$, să se determine viteza de ridicare a platformei în funcţie de unghiul θ. Fiecare bară este articulată cilindric la mijloc (în C) cât şi în capete iar lungimile lor sunt: $L_{BD} = L_{AE} = 1,2 \left[m \right]$.

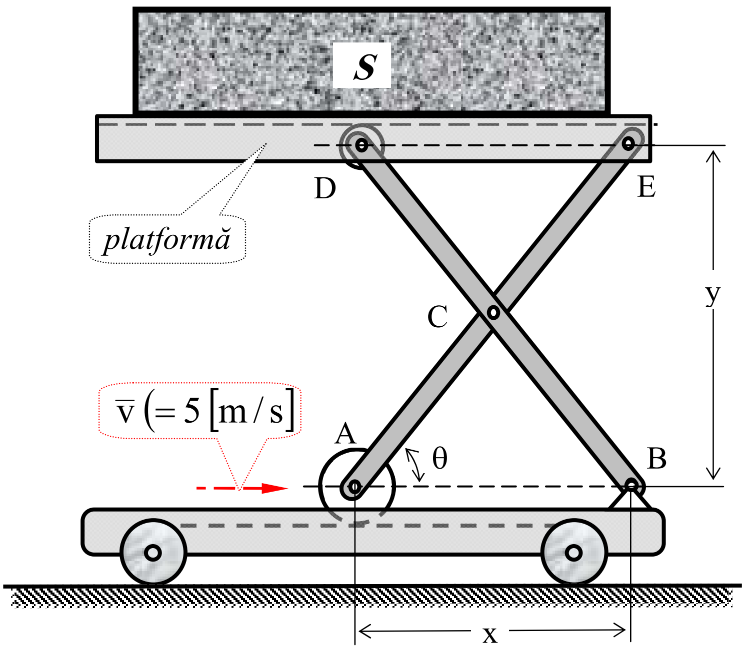


Fig. Apl-4.6

Răspuns:
$v_{platforma} = 5 \left[m/s \right]$

4.2.3. Mişcarea plan-paralelă

4.2.3.1. Definiţia mişcării. Poziţia solidului rigid

Definiţie: Un solid rigid execută mişcare plan-paralelă dacă un plan solidar cu acesta (planul π) rămâne în tot timpul mişcării în contact (suprapus) cu un alt plan fix în spaţiu (planul π_1) numit planul director (fig. 4.7).

Considerăm solidul rigid din fig. 4.7 ce execută mişcare plan-paralelă. Cunoscând mişcarea acestuia în raport cu un sistem de referinţă fix să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia unui punct P_i al solidului rigid. Alegem două sisteme de referinţă, unul fix $O_1x_1y_1z_1$ şi unul mobil $Oxyz$, astfel încât planul fix $x_1O_1y_1$ să fie comun cu planul director π_1, iar planul mobil

xOy să fie comun cu planul π solidar cu rigidul, ceea ce inseamnă ca în tot timpul mişcării aceste plane vor fi suprapuse continuu.

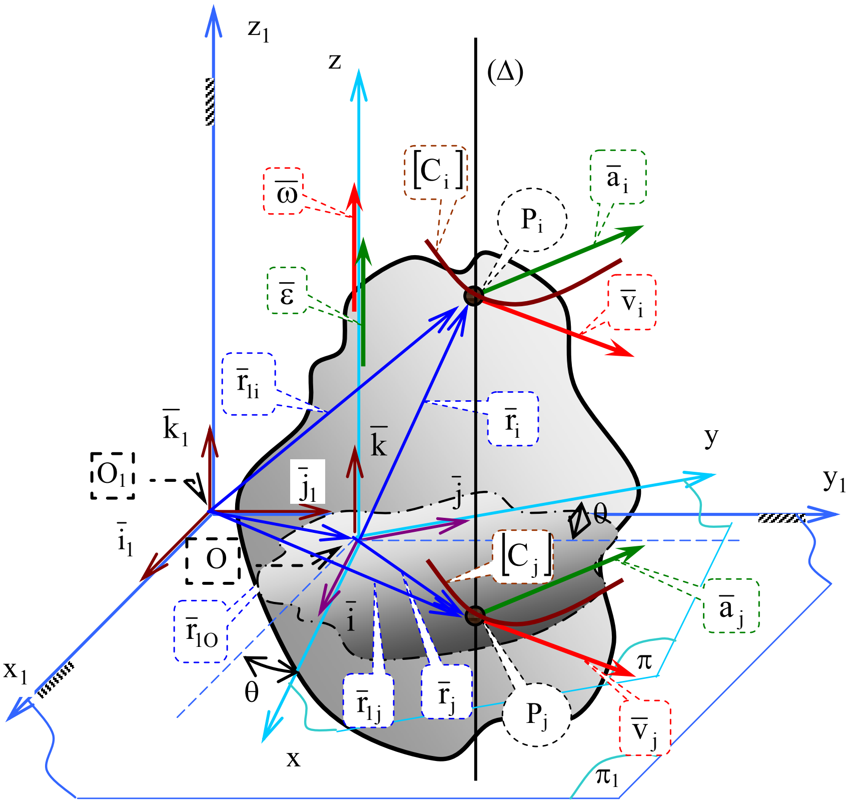


Fig. 4.7.

Cu o astfel de alegere, în tot timpul mişcării, originea O a sistemului mobil rămâne în planul director $x_1O_1y_1$ iar axa Oz rămâne perpendiculară pe planul director, adică această axă are direcţie fixă.

Deci mişcarea solidului rigid şi a sistemului mobil este cunoscută dacă se cunoaşte funcţia de timp $\bar{r}_{1O} = \bar{r}_{1O}(t)$ - vectorul de poziţie a originii sistemului mobil în raport cu cel fix şi unghiul de rotaţie $\theta = \theta(t)$ dintre axa Ox şi O_1x_1 (egal cu cel dintre Oy şi O_1y_1). Mişcarea originii sistemului de referinţă mobil făcându-se în planul director, rezultă că poziţia sa este determinată la orice moment numai de doi parametri scalari ($x_{1O}(t)$ şi $y_{1O}(t)$) şi împreună cu unghiul de rotaţie ($\theta = \theta(t)$) determină în totalitate poziţia, adică solidul rigid în mişcarea plan-paralelă are trei grade de libertate.

Aceşti trei parametri scalari de poziţie sunt puşi în evidenţă prin relaţiile:

$$\bar{r}_{1O} = \bar{r}_{1O}(t) = x_{1O}(t) \cdot \bar{i} + y_{1O}(t) \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} \tag{4.48}$$

$$\begin{cases} \bar{i} = \bar{i}(t) = \cos\theta \cdot \bar{i}_1 + \sin\theta \cdot \bar{j}_1 \\ \bar{j} = \bar{j}(t) = -\sin\theta \cdot \bar{i}_1 + \cos\theta \cdot \bar{j}_1 \\ \bar{k} = \bar{k}_1 = \overline{const.} \end{cases} \tag{4.49}$$

4.2.3.2. Traiectoria punctului P_i

Alegerea punctului P_i, ce aparţine rigidului, exclude apartenenţa sa la planul director, fapt care permite scrierea relaţiei:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{1O} + \bar{r}_i, \tag{4.50}$$

$$\bar{r}_{1i} = x_{1i} \cdot \bar{i}_1 + y_{1i} \cdot \bar{j}_1 + z_{1i} \cdot \bar{k}_1,$$

unde
$$\bar{r}_{1O} = x_{1O} \cdot \bar{i}_1 + y_{1O} \cdot \bar{j}_1, \tag{4.51}$$

$$\bar{r}_i = x_i \cdot \bar{i} + y_i \cdot \bar{j} + z_i \cdot \bar{k}.$$

Proiectăm relaţia (4.50), utilizând şi relaţiile (4.51), pe axele sistemului de referinţă fix şi obţinem:

$$\begin{cases} x_{1i} = x_{1O} + x_i \cdot \cos\theta - y_i \cdot \sin\theta \\ y_{1i} = y_{1O} + x_i \cdot \sin\theta + y_i \cdot \cos\theta \\ z_{1i} = z_i = \text{const.} \end{cases} \tag{4.52}$$

Relaţiile (4.52) reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului P_i. Aceste relaţii indică faptul că traiectoriile sunt situate în plane paralele cu planul director ($z_{1i} = z_i = \text{const.}$) şi că punctele aparţinând dreptelor perpendiculare pe planul director ($\Delta \perp \pi_1$) au traiectorii identice.

4.2.3.3. Distribuţia de viteze şi acceleraţii

Vectorii viteză unghiulară $\bar{\omega}$ şi acceleraţie unghiulară $\bar{\varepsilon}$ au aceleaşi expresii ca şi în cazul mişcării de rotaţie cu axă fixă, adică:

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k} = \dot{\theta} \cdot \bar{k} \quad \text{şi} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k} = \ddot{\theta} \cdot \bar{k} \tag{4.53}$$

deoarece din relaţiile (4.8) de la capitolul 4.1, particularizând ($\dot{\bar{k}} = 0$) avem:

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \omega_z = \omega = \dot{\theta} \\ \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = 0 \\ \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = 0 \end{cases}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţia (4.50):

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{1O} + \bar{r}_i\right] \Rightarrow \dot{\bar{r}}_{1i} = \dot{\bar{r}}_{1O} + \dot{\bar{r}}_i$$

unde

$\dot{\bar{r}}_{1i} = \bar{v}_i$ - este viteza punctului P_i;

$\dot{\bar{r}}_{1O} = \bar{v}_O$ - este viteza originii sistemului de referinţă mobil O;

$\dot{\bar{r}}_i = \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ - este derivata vectorului de poziţie $\bar{r}_i$ al punctului P_i, vector dat prin proiecţii în sistem de referinţă mobil, care sunt constante, fapt pentru care, derivatele acestora în raport cu timpul sunt nule, ceeace face ca $\dot{\bar{r}}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$.

Rezultă astfel relaţia distribuţiei de viteze în mişcarea plan-paralelă:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_i. \tag{4.54}$$

Exprimăm vectorii din componenţa relaţiei (4.54), în funcţie de proiecţiile lor pe axele sistemului de referinţă mobil şi apoi proiectăm relaţia pe axele acestui sistem de referinţă, astfel:

$$\bar{v}_i = v_{ix} \cdot \bar{i} + v_{iy} \cdot \bar{j} + v_{iz} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{v}_O = v_{Ox} \cdot \bar{i} + v_{Oy} \cdot \bar{j},$$

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_i = \omega \cdot \bar{k} \times \left(x_i \cdot \bar{i} + y_i \cdot \bar{j} + z_i \cdot \bar{k} \right) = -\omega \cdot y_i \cdot \bar{i} + \omega \cdot x_i \cdot \bar{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{ix} = v_{Ox} - y_i \cdot \omega \\ v_{iy} = v_{Oy} + x_i \cdot \omega \\ v_{iz} = 0 \end{cases} \tag{4.55}$$

Relaţiile (4.55) arată că toate punctele care aparţin unei drepte (Δ), perpendiculară pe planul director, au aceeaşi viteză ($v_{iz} = 0$).

În general, în mişcarea plan paralelă există puncte de viteză nulă, care aparţin unei drepte perpendiculară pe planul director, de ecuaţie rezultată din relaţia (4.55) prin anularea proiecţiilor vectorului viteză v_{ix} şi v_{iy}, adică:

$$\begin{cases} 0 = v_{Ox} - y_i \cdot \omega \\ 0 = v_{Oy} + x_i \cdot \omega \end{cases} \tag{4.56}$$

Dreapta rezultată din intersecţia planelor (4.56), înţeapă planul director într-un punct notat I, numit CIR (centrul instantaneu de rotaţie), ale cărui coordonate se obţin din (4.56) introducând notaţiile ξ şi η:

$$\begin{cases} \xi = -\dfrac{v_{Oy}}{\omega} \\ \eta = \dfrac{v_{Ox}}{\omega} \end{cases} \tag{4.57}$$

Aceste relaţii sunt *ecuaţiile rostogolitoarei* (*centroidei mobile*) care este locul geometric al CIR-ului înregistrat în planul xOy al sistemului de referinţă mobil. Locul geometric al CIR-ului în planul $x_1O_1y_1$ al sistemului de referinţă fix este numit *bază* (*centroidă fixă*).

Distribuţia de viteze în mişcarea plan paralelă dată de relaţia (4.54) poate fi identificată cu distribuţia de viteze din mişcarea de rotaţie cu axă fixă, ca şi când planul solidar cu rigidul s-ar roti în jurul CIR-ului cu viteza unghiulară ω în raport cu planul director.

Pentru demonstraţie, notăm cu $\overline{\rho}_I$ vectorul de poziţie al CIR-ului I faţă de O şi scriem relaţia distribuţiei de viteze (4.54) pentru punctele I şi P_i ale rigidului, conţinute în planul director (fig. 4.8):

$$\overline{v}_I = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_I, \qquad \overline{v}_i = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{r}_i,$$

apoi facem diferenţa acestor relaţii şi obţinem

$$\overline{v}_i - \overline{v}_I = \overline{\omega} \times (\overline{r}_i - \overline{\rho}_I) \tag{4.58}$$

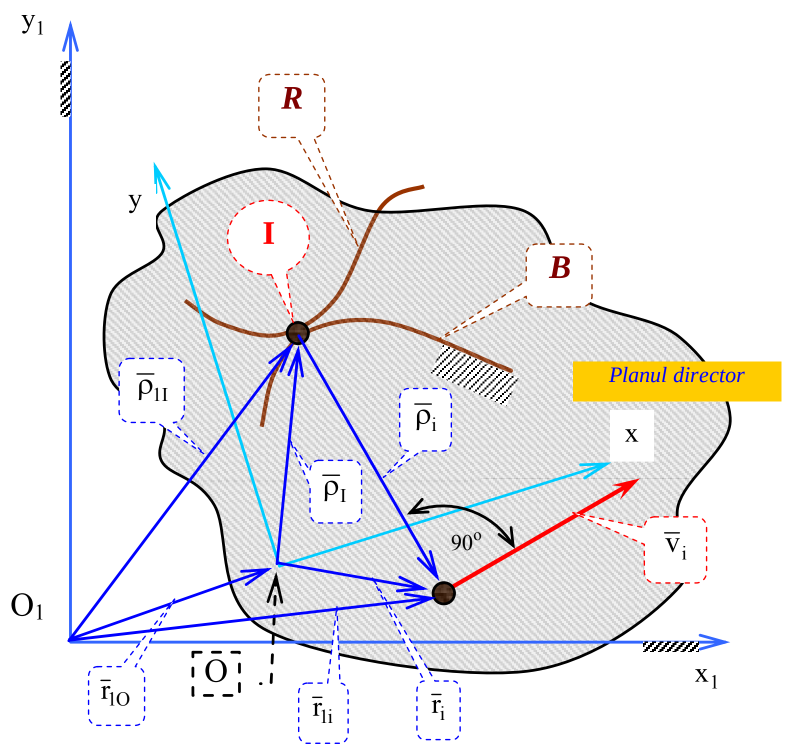


Fig. 4.8.

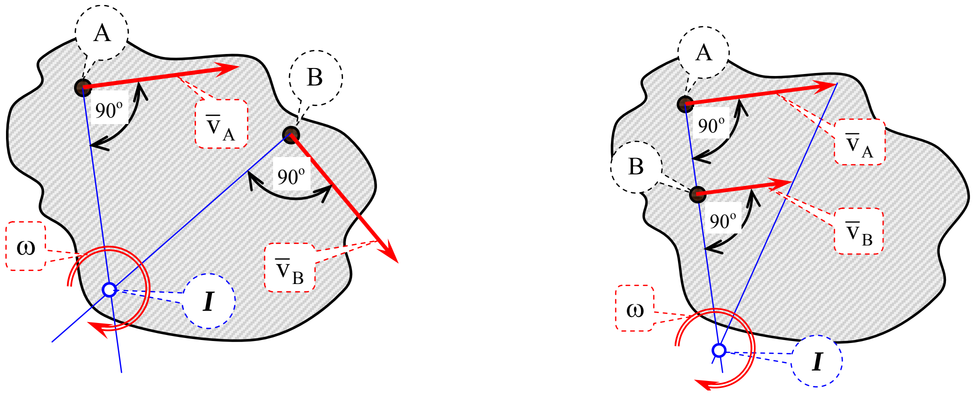
Avem în vedere că $\overline{v}_I = 0$ şi facem notaţia $\overline{r}_i - \overline{\rho}_I = \overline{\rho}_i$ care reprezintă vectorul de poziţie al punctului P_i faţă de centrul instantaneu I.

Introducând acestea în (4.58), obţinem:

$$\overline{v}_i = \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i \tag{4.59}$$

Relaţia (4.59) arată că vitezele sunt distribuite în jurul lui I ca şi cum solidul ar executa rotaţie în jurul acestui punct, fapt ce permite determinarea poziţiei centrului instantaneu de rotaţie prin construcţie grafică.

Deoarece $\overline{v}_i = \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i$, rezultă că $\overline{v}_i$ este ortogonal cu $\overline{\rho}_i$. Aşa că dacă se cunosc traiectoriile a două puncte A şi B şi poziţiile lor la un moment oarecare t, se determină CIR-ul la intersecţia normalelor principale, deci perpendiculare pe vitezele celor două puncte (fig. 4.9,a).



a) ***b)***

Fig. 4.9.

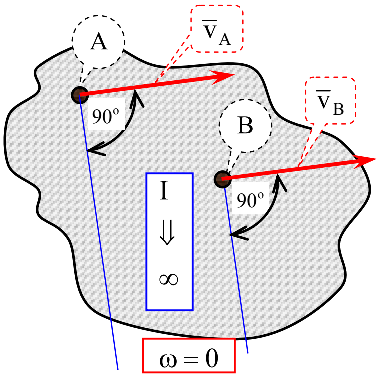


Fig. 4.9, c)

În cazul în care normalele coincid (fig. 4.9,b), este necesar să se cunoască şi mărimile vitezelor, pentru a putea determina poziţia CIR-ului.

Dacă normalele sunt paralele (fig. 4.9,c), centrul instantaneu de rotaţie este aruncat la infinit, viteza unghiulară este nulă, vitezele tuturor punctelor rigidului sunt egale între ele iar despre rigid spunem că, pentru acel moment, distribuţia de viteze este identică cu una de mişcare de translaţie.

Aplicaţie: centroidele

Să se determine ecuaţiile bazei şi rostogolitoarei pentru mecanismul din figura 4.10 constituit din tija AB, de lungime ℓ, articulată cu cele două capete la două culise A şi B care se mişcă în lungul a două tije fixe, verticală respectiv orizontală.

Centroida fixă (baza). Ecuaţia acestui loc geometric se stabileşte după ce în prealabil stabilim ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} \xi_1 = \ell \cdot \cos\varphi, \\ \eta_1 = \ell \cdot \sin\varphi. \end{cases} \tag{4.60}$$

Se elimină parametrul φ prin ridicarea la pătrat şi adunarea relaţiilor (4.60), adică:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \ell^2, \tag{4.61}$$

astfel că s-a obţinut ecuaţia bazei, care este ecuaţia unui cerc de rază ℓ cu centrul în O_1 (originea sistemului de referinţă fix).

Centroida mobilă (rostogolitoarea). Şi ecuaţia acestui loc geometric se stabileşte, după ce în prealabil stabilim ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 \cdot \cos\varphi = \ell \cdot \cos^2\varphi, \\ \eta = \xi_1 \cdot \sin\varphi = \ell \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi. \end{cases} \tag{4.62}$$

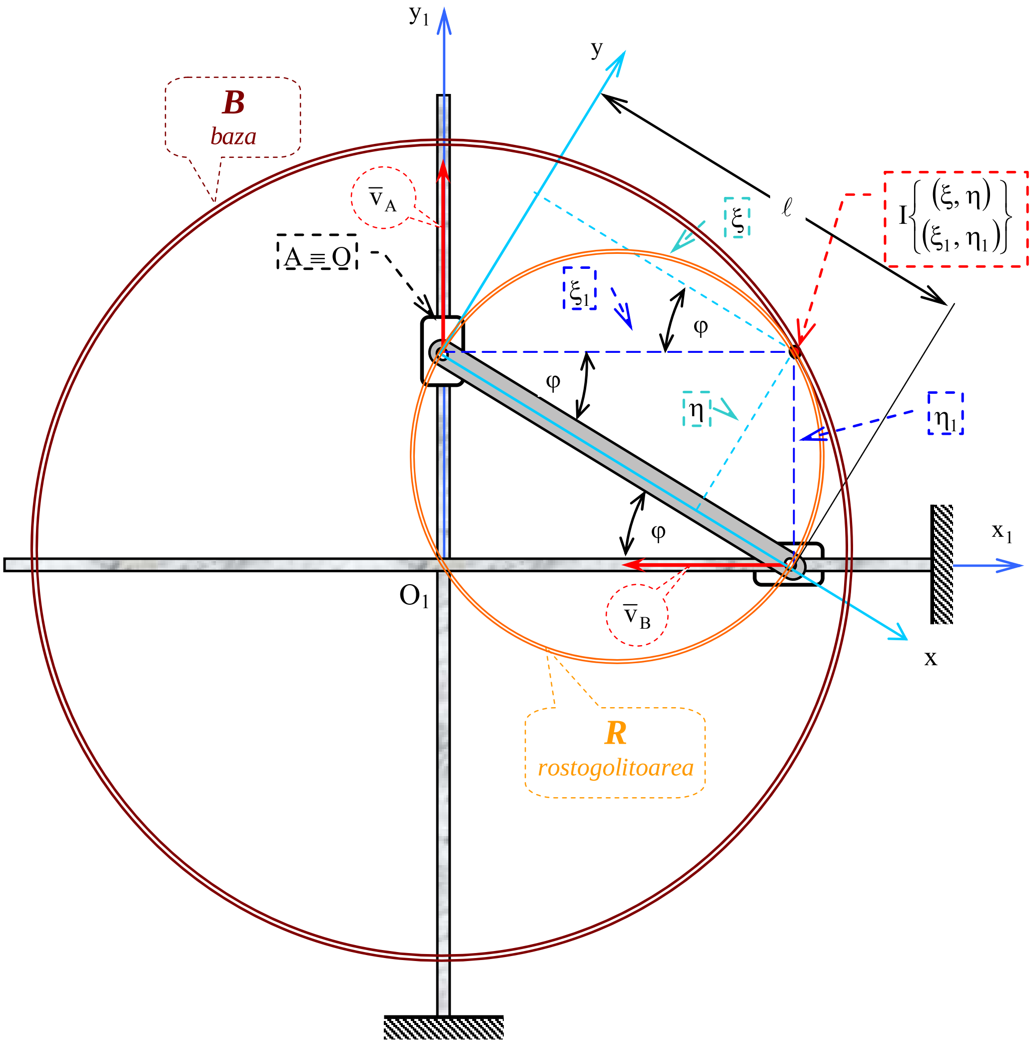


Fig. 4.10

Se elimină parametrul φ prin ridicarea la pătrat a relaţiei (4.62$_2$) şi înlocuirea, din relaţia (4.62$_2$), a funcţiei $\cos^2\varphi$, adică:

$$\eta^2 = \ell^2 \cdot \frac{\xi}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{\xi}{\ell}\right),$$

care prin ordonare şi aplicare unui artificiu simplu, se transformă în:

$$\left(\xi - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2, \tag{4.63}$$

astfel că s-a obţinut ecuaţia rostogolitoarei, care este un cerc de rază $\ell/2$ cu centrul plasat în mijlocul tijei AB.

Pentru obţinerea distribuţiei de acceleraţii se procedează la derivarea în raport cu timpul a relaţiei (4.54) şi obţinem:

$$\dot{\bar{v}}_i = \dot{\bar{v}}_O + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \cdot \dot{\bar{r}}_i ,$$

unde: $\dot{\bar{v}}_i = \bar{a}_i$ - este acceleraţia punctului P_i;

$\dot{\bar{v}}_o = \bar{a}_o$ - este acceleraţia originii sistemului de referinţă mobil O;

$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$ - este acceleraţia unghiulară a sistemului de referinţă mobil, deci şi a solidului rigid;

$\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ - este derivata vectorului de poziţie $\bar{r}_i$ al punctului P_i, vector dat prin proiecţii în sistem de referinţă mobil;

Deci, distribuţia de acceleraţii în mişcarea plan-paralelă este dată de relaţia:

$$\Rightarrow \quad \bar{a}_i = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i). \qquad (4.64)$$

Exprimăm vectorii din componenţa relaţiei (4.64), în funcţie de proiecţiile lor pe axele sistemului de referinţă mobil şi apoi proiectăm relaţia pe axele acestui sistem de referinţă, astfel:

$$\bar{a}_i = a_{ix} \cdot \bar{i} + a_{iy} \cdot \bar{j} + a_{iz} \cdot \bar{k} ,$$

$$\bar{a}_O = a_{Ox} \cdot \bar{i} + a_{Oy} \cdot \bar{j},$$

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i = \varepsilon \cdot \bar{k} \times (x_i \cdot \bar{i} + y_i \cdot \bar{j} + z_i \cdot \bar{k}) = -\varepsilon \cdot y_i \cdot \bar{i} + \varepsilon \cdot x_i \cdot \bar{j},$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \omega \cdot \bar{k} \times (-\omega \cdot y_i \cdot \bar{i} + \omega \cdot x_i \cdot \bar{j}) = -\omega^2 \cdot x_i \cdot \bar{i} - \omega^2 \cdot y_i \cdot \bar{j}.$$

Proiecţiile pe axele sistemului de referinţă mobil sunt:

$$\begin{cases} a_{ix} = a_{Ox} - y_i \cdot \varepsilon - x_i \cdot \omega^2 \\ a_{iy} = a_{Oy} + x_i \cdot \varepsilon - y_i \cdot \omega^2 \quad (4.65) \\ a_{iz} = 0 \end{cases}$$

Observăm că şi vectorul acceleraţie $\bar{a}$, aparţine unui plan paralel cu planul director (proiecţia pe axa Oz este nulă).

Deci este suficient să determinăm mărimile cinematice pentru punctele plasate în planul director, şi apoi să le atribuim şi punctelor situate pe dreaptele perpendiculare pe planul director în punctele respective.

Apl. 4.7.

Barele $\boldsymbol{B_1}$ şi $\boldsymbol{B_2}$ din figura Apl-4.7 sunt articulate cilindric în punctele O respectiv O' la pardoseală (sistemul fix). Bara $\boldsymbol{B_2}$ este deasemeni articulată cilindric la ghidajul ***G***, în punctul A. Capătul superior al barei $\boldsymbol{B_1}$ este articulat cilindric la o rolă care se mişcă liber în ghidajul ***G***. Vitezele unghiulare ale barelor $\boldsymbol{B_1}$ şi $\boldsymbol{B_2}$ sunt constante şi au mărimile şi sensurile indicate în figură. Să se determine viteza ştiftului S în ghidajul ***G*** şi viteza unghiulară a ghidajului ***G*** la momentul considerat în figură.

Rezolvare:

Determinarea vitezelor

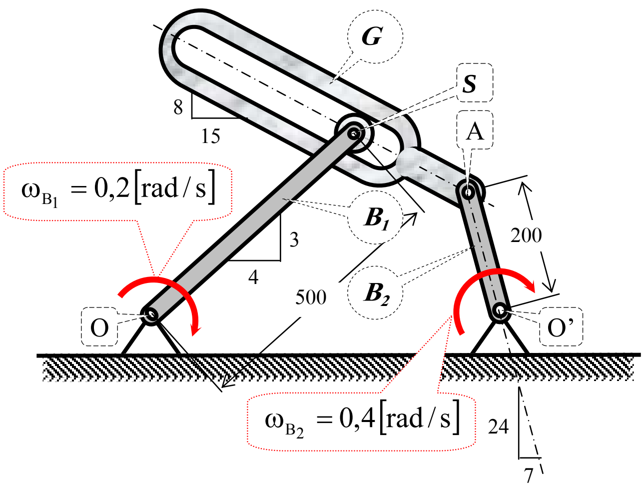


Fig. Apl-4.7

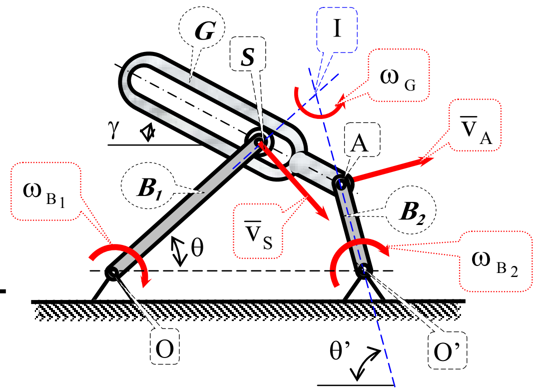


Fig. Apl-4.7.a

Din mişcările de rotaţie ale barelor ***B₁*** şi ***B₂*** se determină vitezele punctelor S (viteza absolută) şi A astfel:

$$v_S = \omega_{B_1} \cdot OS = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1[\mathrm{m/s}],$$

$$v_A = \omega_{B_2} \cdot O'A = $$
$$= 0,4 \cdot 0,2 = 0,08[\mathrm{m/s}].$$

Viteza absolută ($\bar{v}_S = \bar{v}_S^a$) a punctului S ce execută mişcare relativă ($\bar{v}_S^r$) în canalul ghidajului ***G*** şi mişcare de transport ($\bar{v}_S^t$) împreună cu ghidajul se poate exprima astfel:

$$\bar{v}_S = \bar{v}_S^a = \bar{v}_S^t + \bar{v}_S^r \qquad (1)$$

Viteza de transport ($\bar{v}_S^t$) a punctului S, solidar cu ghidajului ***G*** care face mişcare plan paralelă, poate fi exprimată astfel:

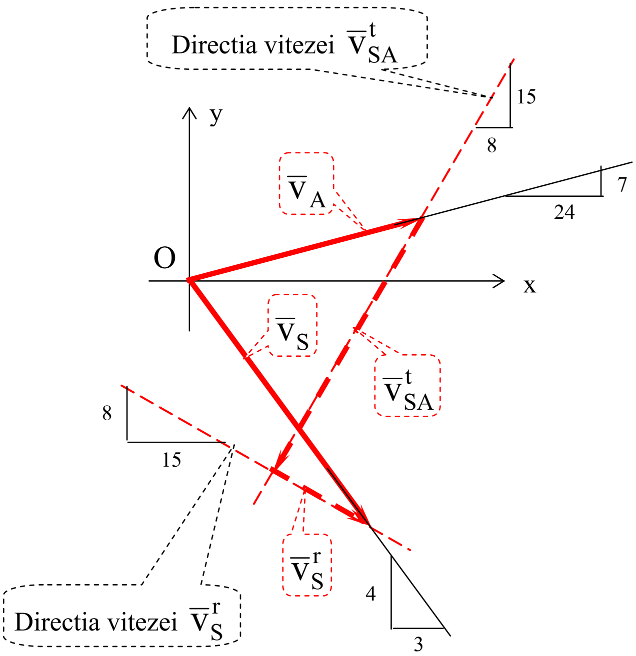


Fig. Apl-4.7.b

$$\overline{v}_S^t = \overline{v}_A + \overline{v}_{SA}^t \tag{2}$$

Introducând (2) în (1) obţinem:

$$\underset{\perp OS}{\underline{\underline{\overline{v}_S}}} = \underset{\perp O'A}{\underline{\underline{\overline{v}_A}}} + \underset{\perp AS}{\underline{\overline{v}_{SA}^t}} + \underset{\parallel AS}{\underline{\overline{v}_S^r}} \tag{3}$$

Reprezentăm grafic ecuaţia vectorială (3), fig. Apl-4.7.b, apoi o proiectăm pe axele sistemului de referinţă xOy şi obţinem:

$$\begin{cases} v_S \cdot \dfrac{3}{5} = v_A \cdot \dfrac{24}{25} - v_{SA}^t \cdot \dfrac{8}{17} + v_S^r \cdot \dfrac{15}{17} \cdot 15 \\ -v_S \cdot \dfrac{4}{5} = v_A \cdot \dfrac{7}{25} - v_{SA}^t \cdot \dfrac{15}{17} - v_S^r \cdot \dfrac{8}{17} \end{cases}$$

Înlocuim mărimile vitezelor punctelor S şi A cu valorile calculate mai sus ($v_S = 0{,}1[m/s]$, $v_A = 0{,}08[m/s]$) şi apoi determinăm mărimile necunoscute ale vitezelor (v_S^r) şi (v_{SA}^t), astfel:

$$\begin{cases} 0{,}1 \cdot \dfrac{3}{5} = 0{,}08 \cdot \dfrac{24}{25} - v_{SA}^t \cdot \dfrac{8}{17} + v_S^r \cdot \dfrac{15}{17} \\ -0{,}1 \cdot \dfrac{4}{5} = 0{,}08 \cdot \dfrac{7}{25} - v_{SA}^t \cdot \dfrac{15}{17} - v_S^r \cdot \dfrac{8}{17} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \quad v_S^r = 0{,}0333647[m/s]$$

$$\Rightarrow \quad v_{SA}^t = 0{,}0982588[m/s].$$

Viteza unghiulară a ghidajului ***G*** este:

$$\omega_a = \frac{v_{SA}^t}{AS} = \frac{0{,}0982588}{0{,}2295} = 0{,}428[rad/s],$$

în care AS s-a determinat astfel (fig. Apl-4.7.a):

OS· sin θ = O'A· sin θ' + AS· sin γ şi

$$AS = \frac{1}{\sin\gamma} \cdot (OS \cdot \sin\theta - O'A \cdot \sin\theta') = \frac{1}{8/17} \cdot \left(0{,}5 \cdot \frac{3}{5} - 0{,}2 \cdot \frac{24}{25}\right)$$

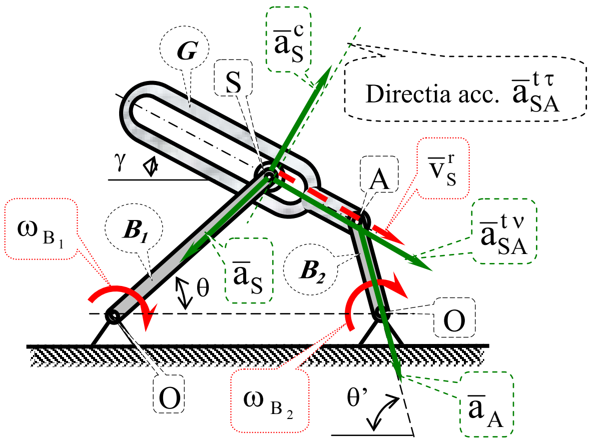


Fig. Apl-4.7.c

$$\Rightarrow \quad AS = 0{,}2295\left[m\right].$$

Determinarea acceleraţiilor

Din mişcările de rotaţie ale barelor $\boldsymbol{B_1}$ şi $\boldsymbol{B_2}$ se determină acceleraţiile punctelor S (acceleraţia absolută) şi A, astfel (fig. Apl-4.7.c):

$$a_S = \omega_{B1}^2 \cdot OS = $$
$$= 0{,}2^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}02 m/s^2$$

$$a_A = \omega_{B2}^2 \cdot O'A = $$
$$= 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}032 m/s^2$$

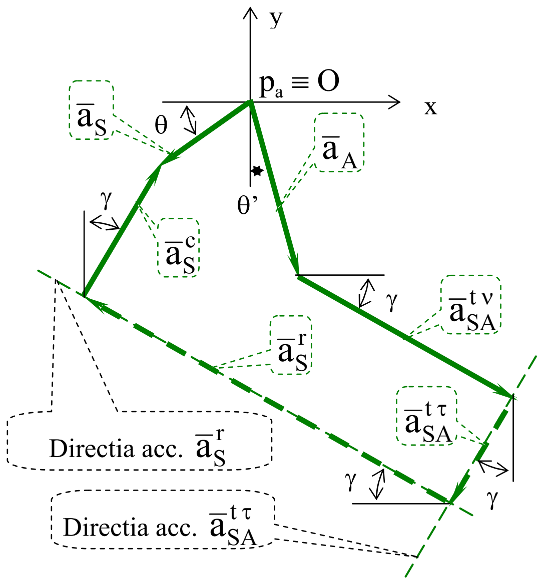


Fig. Apl-4.7.d

Pentru punctul (ştiftul) S, în mişcare relativă în canalul practicat în ghidajul *G*, relaţia vectorială între acceleraţiile: absolută, relativă, de transport şi Corriolis, este:

$$\underset{\parallel OS}{\underline{\underline{\bar{a}_S}}} = \bar{a}_S^a = \bar{a}_S^t + \underset{\parallel SA}{\underline{\underline{\bar{a}_S^r}}} + \underset{\perp SA}{\underline{\underline{\bar{a}_S^c}}} \qquad (1')$$

Exprimăm acceleraţia de transport($\bar{a}_S^t$) a punctului S solidar cu ghidajul *G* care face mişcare plan paralelă, în funcţie de acceleraţia punctului A(fig. Apl-4.7.c):

$$\underline{\underline{\bar{a}_S^t}} = \underset{\parallel O'A}{\underline{\underline{\bar{a}_A}}} + \underset{\parallel SA}{\underline{\underline{\bar{a}_{SA}^{t\nu}}}} + \underset{\perp SA}{\bar{a}_{SA}^{t\tau}} \qquad (2')$$

Înlocuim (2') în (1') şi obţinem:

$$\underset{\parallel OS}{\underline{\underline{\bar{a}_S}}} = \underset{\parallel O'A}{\underline{\underline{\bar{a}_A}}} + \underset{\parallel SA}{\underline{\underline{\bar{a}_{SA}^{t\nu}}}} + \underset{\perp SA}{\bar{a}_{SA}^{t\tau}} + \underset{\parallel SA}{\bar{a}_S^r} + \underset{\perp SA}{\underline{\underline{\bar{a}_S^c}}} \qquad (3')$$

în care $a_A = 0{,}032 \left[m/s^2\right]$

$$a_{SA}^{tv} = \omega_G^2 \cdot AS = 0{,}428^2 \cdot 0{,}2295 = 0{,}0420407 \left[m/s^2\right]$$

$$\overline{a}_S^c = 2 \cdot \overline{\omega}_G \times \overline{v}_S^r$$

$$a_S^c = 2 \cdot \omega_G \cdot v_S^r = 2 \cdot 0{,}428 \cdot 0{,}0333647 = 0{,}02856 \left[m/s^2\right]$$

$$a_S = 0{,}02 \left[m/s^2\right]$$

Reprezentăm grafic ecuaţia vectorială (3'), fig. Apl-4.7.d, apoi o proiectăm pe axele sistemului de referinţă xOy şi obţinem:

$$\begin{cases} -a_S \cdot \cos\theta = a_A \cdot \cos\theta' + a_{SA}^{tv} \cdot \cos\gamma - a_{SA}^{t\tau} \sin\gamma - a_S^r \cdot \cos\gamma + a_S^c \cdot \sin\gamma \\ -a_S \cdot \sin\theta = -a_A \cdot \sin\theta' - a_{SA}^{tv} \cdot \sin\gamma - a_{SA}^{t\tau} \cdot \cos\gamma + a_S^r \cdot \sin\gamma + a_S^c \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}02 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}032 \cdot \frac{7}{25} + 0{,}042 \cdot \frac{15}{17} - a_{SA}^{t\tau} \cdot \frac{8}{17} - a_S^r \cdot \frac{15}{17} + 0{,}02856 \cdot \frac{8}{17} \\ -0{,}02 \cdot \frac{3}{5} = -0{,}032 \cdot \frac{24}{25} - 0{,}042 \cdot \frac{8}{17} - a_{SA}^{t\tau} \cdot \frac{15}{17} + a_S^r \cdot \frac{8}{17} + 0{,}02856 \cdot \frac{15}{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_S^r = \frac{1}{17} \cdot 1{,}23816 = 0{,}0728 \left[m/s^2\right] \qquad \blacklozenge$$

$$\Rightarrow \quad a_{SA}^{t\tau} = 0{,}02385 \left[m/s^2\right] \qquad \blacklozenge$$

Acceleraţia unghiulară a ghidajului ***G***:

$$\varepsilon_G = \frac{a_{SA}^{t\tau}}{SA} = \frac{0{,}02385}{0{,}2295} = 1{,}0392157 \left[rad/s^2\right] \qquad \blacklozenge$$

Apl. 4.8.

Cilindrul ***C*** din figura Apl-4.8 se rostogoleşte pe o suprafaţă circulară de rază R=0,6 m. Când cilindrul se afla în cel mai de jos punct al suprafeţei cilindrice (circulare în secţiune), viteza şi acceleraţia unghiulare sunt $\omega_C = 0{,}2 \left[rad/s\right]$ respectiv $\varepsilon_C = 0{,}02 \left[rad/s^2\right]$. Bara ***AS*** este ataşată de cilindrul ***C*** în A, printr-o articulaţie cilindrică şi de culisa care alunecă în canalul din manivela ***M***, prin ştiftul *S*. Viteza unghiulară, constantă, a manivelei ***M*** este $\omega_M = 0{,}3 \left[rad/s\right]$. Să se determine viteza ştiftului *S* şi viteza unghiulară a barei ***AS***, pentru poziţia mecanismului reprezentată în figură.

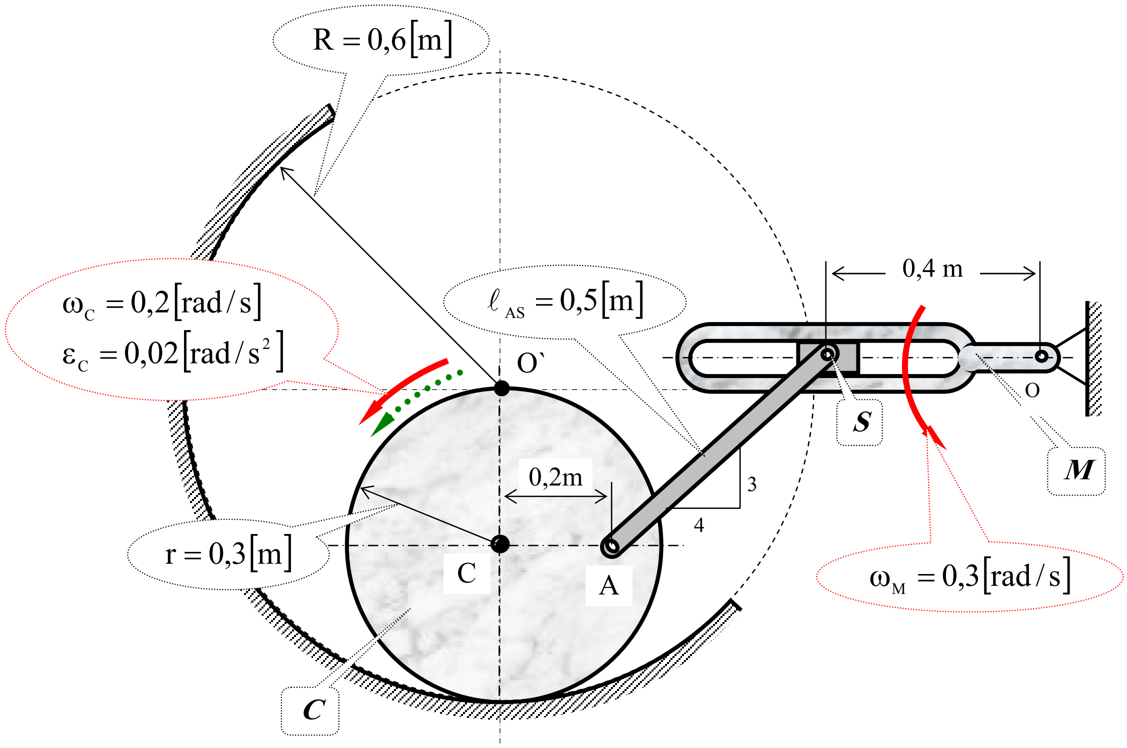


Fig. Apl-4.8

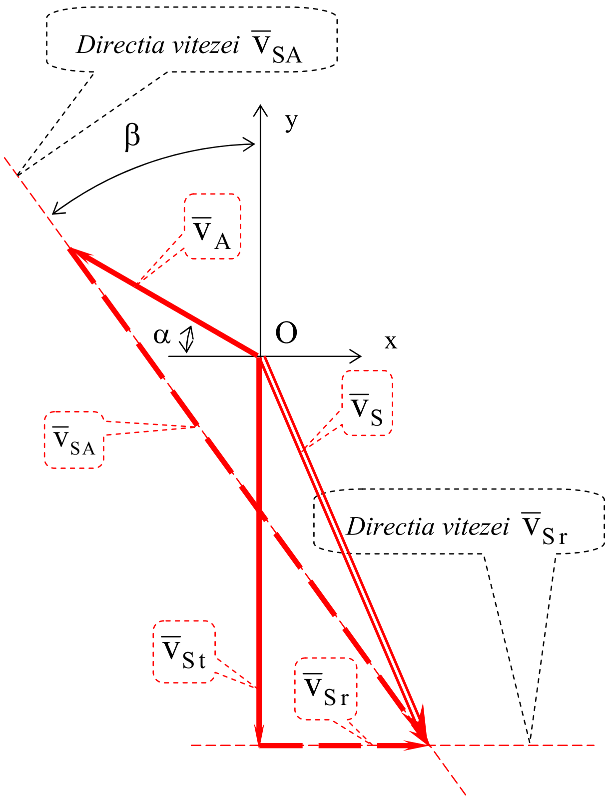


Fig. Apl-4.8.a

Rezolvare:

Determinarea vitezelor

Mişcările elementelor din componenţa mecanismului: cilindrul ***C*** - mişcare plan paralelă cu C.I.R-ul în I (punctul de contact cu suptafaţa cilindrică (circulară în secţiune) fixă ; bara ***AS*** - mişcare plan paralelă şi manivela ***M*** - rotaţie cu axă fixă în jurul articulaţiei cilindrice fixe O.

Viteza punctului A ce aparţine cilindrului ***C*** este:

$$v_A = \omega \cdot IA = 0,2 \cdot \sqrt{0,2^2 + 0,3^2} = $$
$$= 0,072111[m/s]$$

Viteza punctului S în funcţie de viteza lui A, ce aparţin barei ***AS***, este:

$$\overline{v}_S = \underset{\perp AI}{\underline{\underline{\overline{v}_A}}} + \underset{\perp AS}{\underline{\overline{v}_{SA}}} \,. \tag{1}$$

Viteza absolută a punctului S, ce aparţine manivelei $\boldsymbol{M}$, este:

$$\underset{(abs)}{\overline{v}_S} = \underset{\perp OS}{\underline{\underline{\overline{v}_{St}}}} + \underset{\perp OS}{\underline{\overline{v}_{Sr}}} \tag{2}$$

în care:

$$v_{St} = \omega_M \cdot OS = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12\left[m/s\right],$$

deoarece traiectoria de transport este cerc cu centrul în O şi rază OS (traiectoria relativă este rectilinie în lungul canalului practicat în manivelă).

Din (1) şi (2), obţinem:

$$\underset{\perp AI}{\underline{\underline{\overline{v}_A}}} + \underset{\perp AS}{\underline{\overline{v}_{SA}}} = \underset{\perp OS}{\underline{\underline{\overline{v}_{St}}}} + \underset{\perp OS}{\underline{\overline{v}_{Sr}}} \,,$$

care proiectată pe axele sistemului din figura Apl-4.8.a, conduce la sistemul de mai jos:

$$\begin{cases} -v_A \cdot \cos\alpha + v_{SA} \cdot \sin\beta = v_{Sr} \\ v_A \cdot \sin\alpha - v_{SA} \cdot \cos\beta = -v_{St} \end{cases},$$

$$\Rightarrow v_{SA} = \frac{1}{\cos\ \beta} \cdot \left(v_A \cdot \sin\alpha + v_{St}\right) = \\ = \frac{5}{4} \cdot \left(0{,}072 \cdot 0{,}555 + 0{,}12\right) = 0{,}2\ \ \left[m/s\right],$$

$$\Rightarrow v_{Sr} = v_{SA} \cdot \sin\beta - v_A \cdot \cos\alpha = 0{,}2 \cdot \frac{3}{5} - 0{,}072 \cdot 0{,}832 = 0{,}06\left[m/s\right].$$

Deci, viteza absolută a ştiftului S (v_S) rezultă din compunerea vitezelor de transport (v_{St}) şi relativă (v_{Sr}), care sunt perpendiculare între ele, astfel că:

$$\underset{(abs)}{v_S} = \sqrt{\left(v_{St}\right)^2 + \left(v_{Sr}\right)^2} = \sqrt{\left(0{,}12\right)^2 + \left(0{,}06\right)^2} = 0{,}134164\left[m/s\right], \blacklozenge$$

iar viteza unghiulară a barei $\boldsymbol{AS}$ este:

$$\omega_{AS} = \frac{v_{SA}}{AS} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4\left[rad/s\right] \qquad \blacklozenge$$

Determinarea acceleraţiilor

Pentru determinarea poziţiei centrului instantaneu al acceleraţiilor

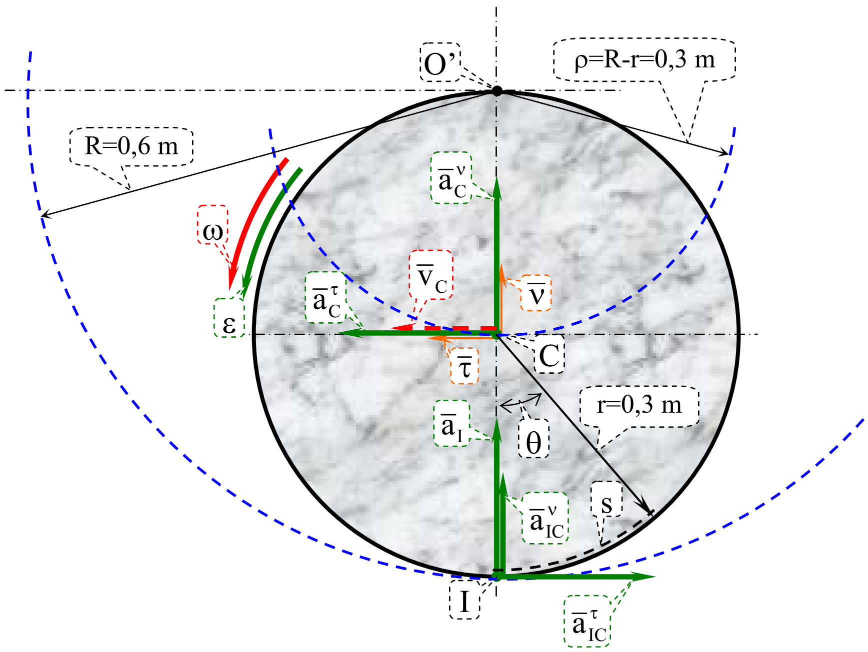


Fig. Apl-4.8.b

(punctul de acceleraţie nulă J) al cilindrului ***C*** în mişcare plan paralelă, este necesar să cunoaştem, pe lângă datele iniţiale viteza unghiulară $\omega_C = 0{,}2\,[\mathrm{rad/s}]$ şi acceleraţia unghiulară $\varepsilon_C = 0{,}02\,[\mathrm{rad/s^2}]$, şi acceleraţia unui punct din planul director.

Punctul căruia putem să-i determinăm acceleraţia, numai cu aceste date iniţiale este chiar centrul instantaneu de rotaţie I (fig. Apl-4.8.b).

Determinăm mai întîi viteza centrului C al cilindrului (θ reprezintă poziţia unghiulară acilindrului; $\dot{\theta} = \omega_C$ - viteza unghiulară şi $\ddot{\theta} = \dot{\omega}_C = \varepsilon_C$ - acceleraţia unghiulară, ale cilindrului) astfel:

$$\overline{v}_C = \overline{v}_I + \overline{v}_{CI} = 0 + \dot{\theta}\cdot IC \cdot \overline{\tau} = \dot{\theta}\cdot r \cdot \overline{\tau},$$

care derivată în raport cu timpul dă vectorul acceleraţie al punctului C:

$$\overline{a}_C = \dot{\overline{v}}_C = \ddot{\theta}\cdot r \cdot \overline{\tau} + \dot{\theta}\cdot r \cdot \dot{\overline{\tau}},$$

în care:

$$\dot{\overline{\tau}} = \dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{d\overline{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}\cdot\overline{v}\cdot\dot{s} = \frac{1}{R-r}\cdot\overline{v}\cdot\left(r\cdot\dot{\theta}\right), \qquad s = r\cdot\theta.$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a_c} = (\ddot{\theta}\cdot r)\cdot\overline{\tau} + \frac{(r\cdot\dot{\theta})^2}{R-r}\cdot\overline{v} = \overline{a_c^\tau} + \overline{a_c^v} \qquad (3)$$

Acceleraţia centrului instantaneu de rotaţie I, în funcţie de acceleraţia centrului C al cilindrului, este:

$$\bar{a}_I = \bar{a}_C + \underset{\parallel IC}{\bar{a}^{\nu}_{IC}} + \underset{\perp IC}{\bar{a}^{\tau}_{IC}}, \tag{4}$$

în care:

$$\begin{aligned} \bar{a}^{\nu}_{IC} &= a^{\nu}_{IC}\cdot\bar{\nu} = \left(\dot{\theta}^2\cdot IC\right)\cdot\bar{\nu} = \left(\dot{\theta}^2\cdot r\right)\cdot\bar{\nu}, \\ \bar{a}^{\tau}_{IC} &= a^{\tau}_{IC}\cdot\bar{\tau} = \left(-\ddot{\theta}\cdot IC\right)\cdot\bar{\tau} = \left(-\ddot{\theta}\cdot r\right)\cdot\bar{\tau}. \end{aligned} \tag{5}$$

Înlocuim relaţiile (3) şi (5) în (4) şi obţinem:

$$\Rightarrow \quad \overline{a_I} = (\ddot{\theta}\cdot r)\cdot\bar{\tau} + \frac{(r\cdot\dot{\theta})^2}{R-r}\cdot\bar{\nu} + \left(\dot{\theta}^2\cdot r\right)\cdot\bar{\nu} + \left(-\ddot{\theta}\cdot r\right)\cdot\bar{\tau} =$$

$$= \dot{\theta}^2\cdot r\cdot(1+\frac{r}{R-r})\cdot\bar{\nu} = \dot{\theta}^2\cdot r\cdot(1+1)\cdot\bar{\nu} = (2\cdot\dot{\theta}^2\cdot r)\cdot\bar{\nu},$$

în care s-a înlocuit şi $R = 2\cdot r$.

Modulul acceleraţiei centrului instantaneu de rotaţie I, este:

$$|\bar{a}_I| = 2\cdot\dot{\theta}^2\cdot r = 2\cdot\omega^2\cdot r = 2\cdot(0,2)^2\cdot 0,3 = 0,024\ \left[m/s^2\right]$$

În continuare determinăm poziţia punctului de acceleraţie nulă (CIA – J) de pe disc şi acceleraţia punctului A (fig. Apl-4.8.c), astfel:

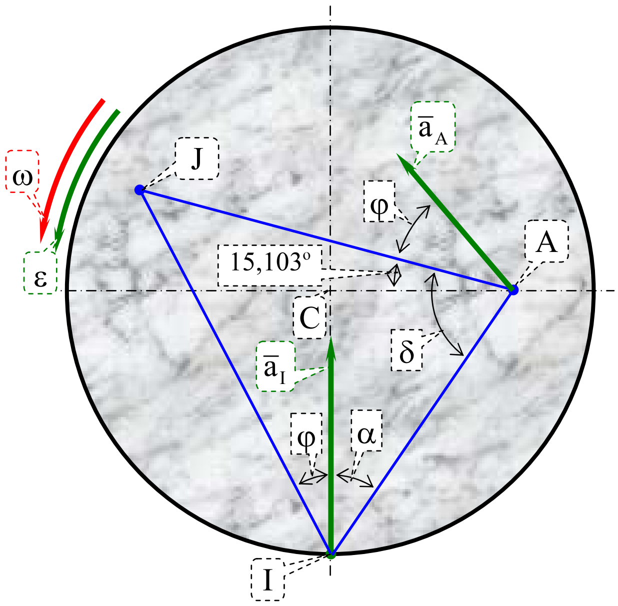


Fig. Apl-4.8.c

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^2} = \frac{0,02}{(0,2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 26,56505^{\circ} =$$

$$= 26^{\circ}\ 33'\ 54''$$

$$IJ = \frac{a_I}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} = \frac{0,024}{\sqrt{0,02^2+0,2^4}} =$$

$$= 0,536656\ [m]$$

$$a_A = JA\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{0,2}{0,3}\right) = 33,69^{\circ}$$

$$IA = \sqrt{CA^2 + CI^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} = 0{,}360555 \; [m]$$

$$JA = \sqrt{IJ^2 + IA^2 - 2 \cdot IJ \cdot IA \cdot \cos(\varphi + \alpha)} =$$

$$= \sqrt{0{,}537^2 + 0{,}361^2 - 2 \cdot 0{,}537 \cdot 0{,}361 \cdot \cos 60{,}25^\circ} = 0{,}47571 \, [m]$$

$$\Rightarrow a_A = JA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}47571 \cdot \sqrt{(0{,}02)^2 + (0{,}2)^4}$$

$$\Rightarrow \quad a_A = 0{,}02127 \left[m/s^2\right].$$

Determinăm direcţia acceleraţiei a_A :

$$IJ = \sqrt{JA^2 + IA^2 - 2 \cdot JA \cdot IA \cdot \cos\beta},$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{JA^2 + IA^2 - IJ^2}{2 \cdot JA \cdot IA} = \frac{0{,}47571^2 + 0{,}361^2 - 0{,}536656^2}{2 \cdot 0{,}47571 \cdot 0{,}361};$$

$$\cos \beta = 0{,}198717.$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 78{,}54^\circ \quad \text{şi} \quad \angle CAJ = (\alpha + \beta) - 90^\circ = 15{,}103^\circ.$$

Deci, direcţia acceleraţiei a_A faţă de orizontală este cunoscută (fig. Apl-4.8.c), adică: $\angle CAJ + \varphi = 15{,}103^\circ + 26{,}565^\circ = 41{,}668^\circ$.

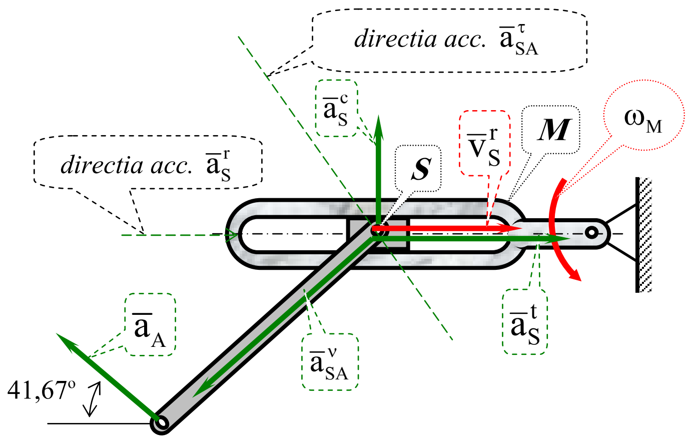


Fig. Apl-4.8.d

Acceleraţia punctului A a fost determinată din mişcarea plan paralelă a cilindrului ***C***. În continuare atribuim mărimea determinată, punctului A ce aparţine tijei AS în mişcare plan paralelă şi scriem relaţia de legătură dintre aceasta şi acceleraţia punctului *S*, astfel (fig. Apl-4.8.d) :

$$\bar{a}_S = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underbrace{\underline{\underline{\bar{a}_{SA}^{\nu}}}}_{\parallel AS} + \underbrace{\underline{\bar{a}_{SA}^{\tau}}}_{\perp AS}, \; (6)$$

în care $\quad a_{SA}^{\nu} = \omega_{AS}^2 \cdot AS = (0{,}4)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}08 \; \left[m/s^2\right].$

Pentru $S \in$ manivelei $\boldsymbol{M}$ (mişcare relativă) putem scrie:

$$\bar{a}_S = \underset{\parallel SO}{\underline{\underline{\bar{a}_S^t}}} + \underset{\parallel SO}{\underline{\underline{\bar{a}_S^r}}} + \underset{\perp SO}{\underline{\underline{\bar{a}_S^c}}}\ , \tag{7}$$

în care $a_S^t = a_S^{tv} = \omega_M^2 \cdot OS = 0{,}3^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}036\left[m/s^2\right]$; $\quad \bar{a}_S^c = 2 \cdot \bar{\omega}_M \times \bar{v}_{Sr}$

şi $\quad a_S^c = 2 \cdot \omega_M \cdot v_{Sr} = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}06 = 0{,}036\left[m/s^2\right]$.

Din (6) şi (7) obţinem

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underset{\parallel AS}{\underline{\underline{\bar{a}_{SA}^\nu}}} + \underset{\perp AS}{\underline{\bar{a}_{SA}^\tau}} = \underset{\parallel SO}{\underline{\underline{\bar{a}_S^t}}} + \underset{\parallel SO}{\underline{\underline{\bar{a}_S^r}}} + \underset{\perp SO}{\underline{\underline{\bar{a}_S^c}}} \tag{8}$$

Proiectăm relaţia (8) pe axele sistemului de coordonate xOy (fig. Apl-4.8.e) şi obţinem:

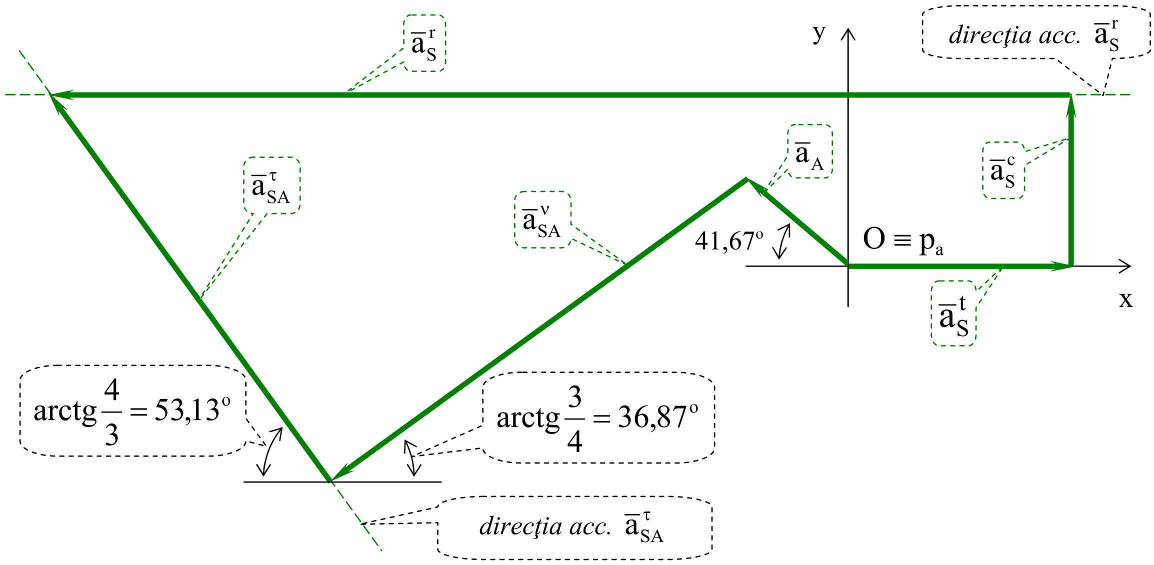


Fig. Apl-4.8.e

$$\begin{cases} a_S^t - a_S^r = -a_A \cdot \cos 41{,}668° - a_{SA}^\nu \cdot \cos 36{,}87° - a_{SA}^\tau \cdot \cos 53{,}13° \\ a_S^c = a_A \cdot \sin 41{,}668° - a_{SA}^\nu \cdot \sin 36{,}87° + a_{SA}^\tau \cdot \sin 53{,}13° \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{SA}^{\tau} = \frac{1}{\sin 53{,}13^{\circ}} \cdot (a_S^c - a_A \cdot \sin 41{,}668^{\circ} + a_{SA}^{v} \cdot \sin 36{,}89^{\circ});$$

$$\Rightarrow a_{SA}^{\tau} = \frac{1}{\sin 53{,}13^{\circ}} \cdot (0{,}036 - 0{,}02127 \cdot \sin 41{,}668^{\circ} + 0{,}08 \cdot \sin 36{,}89^{\circ}) =$$

$$= \frac{1}{\sin 53{,}13^{\circ}} \cdot 0{,}0698595$$

$$a_{SA}^{\tau} = 0{,}0873245[m/s^2]; \qquad \blacklozenge$$

$$\varepsilon_{SA} = \frac{a_{SA}^{\tau}}{SA} = \frac{0{,}0873245}{0{,}5} = 0{,}17465[rad/s^2] \qquad \blacklozenge$$

şi

$$a_S^r = a_S^t + a_A \cdot \cos 41{,}668^{\circ} + a_{SA}^{v} \cdot \cos 36{,}87^{\circ} + a_{SA}^{\tau} \cdot \cos 53{,}13^{\circ} =$$

$$= 0{,}036 + 0{,}02127 \cdot \cos 41{,}668^{o} + 0{,}08 \cdot \cos 36{,}87^{o} + 0{,}087 \cdot \cos 53{,}13^{o},$$

$$a_S^r = 0{,}1682836 \left[m/s^2\right]. \qquad \blacklozenge$$

Apl. 4.9.

Pentru sistemul de bare din figura Apl-4.9, la momentul considerat,

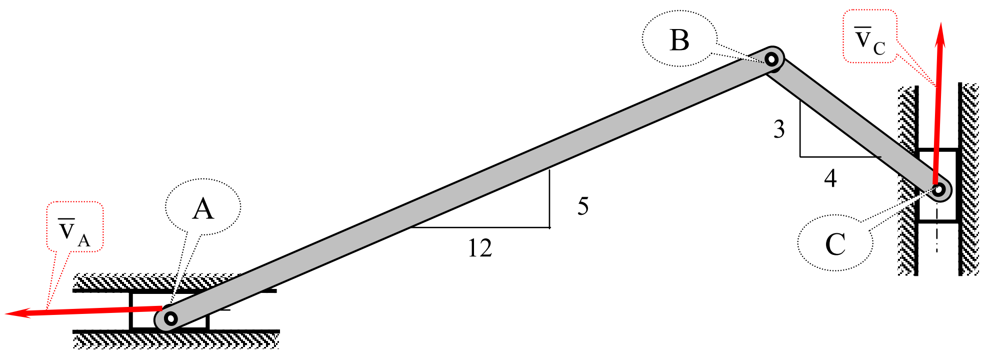


Fig. Apl-4.9

vitezele punctelor A şi C au mărimile $v_A = 2\left[m/s\right]$ şi $v_C = 3\left[m/s\right]$ iar direcţiile şi sensurile conform reprezentării. Să se determine mărimea şi direcţia vitezei punctului B.

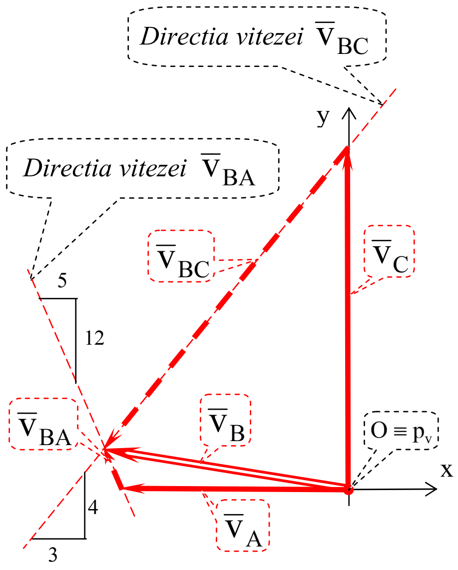


Fig. Apl-4.9.a

Rezolvare:

Culisele A şi C se mişcă rectiliniu după direcţiile orizontală respectiv verticală, cu vitezele cunoscute ca date iniţiale. Deci şi capetele A şi C ale tijelor AB şi BC care execută mişcare plan paralelă, au aceleaşi viteze cu culisele.

Din mişcarea plan paralelă a fiecăreia dintre tijele AB şi BC se scriu ecuaţiile vectoriale:

- pentru punctul B (articulaţie cilindrică) ce aparţine tijei AB:

$$\overline{v}_B = \underset{\text{oriz.}}{\underline{\underline{\overline{v}_A}}} + \underset{\perp AB}{\underline{\overline{v}_{BA}}} \qquad (1)$$

- pentru punctul B (articulaţie cilindrică) ce aparţine tijei BC:

$$\overline{v}_B = \underset{\text{vertic.}}{\underline{\underline{\overline{v}_C}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\overline{v}_{BC}}} \qquad (2)$$

Comparăm relaţiile (1) şi (2), prin intermediul vectorului viteză, $\overline{v}_B$, a punctului B şi obţinem:

$$\underset{\text{oriz.}}{\underline{\underline{\overline{v}_A}}} + \underset{\perp AB}{\underline{\overline{v}_{BA}}} = \underset{\text{vertic.}}{\underline{\underline{\overline{v}_C}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\overline{v}_{BC}}} \qquad (3)$$

Reprezentăm grafic ecuaţia vectorială (3), fig. Apl-4.9.a, apoi o proiectăm pe axele sistemului de referinţă xOy şi obţinem:

$$\begin{cases} -v_A - v_{BA} \cdot \dfrac{5}{13} = -v_{BC} \cdot \dfrac{3}{5} \\ v_{BA} \cdot \dfrac{12}{13} = v_C - v_{BC} \cdot \dfrac{4}{5} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \quad v_{BA} = \frac{1}{\dfrac{5 \cdot 4}{13} + \dfrac{13 \cdot 3}{13}} \cdot (3 \cdot v_C - 4 \cdot v_A) = \frac{13}{56}\,[m/s]$$

şi $$v_{Bx} = -2 - \frac{13}{56} \cdot \frac{5}{13} = -2{,}09\,[m/s],$$

$$v_{By} = \frac{13}{56} \cdot \frac{12}{13} = 0{,}214\,[m/s],$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_B = -2{,}09 \cdot \bar{i} + 0{,}214 \cdot \bar{j}\,[m/s] \qquad ♦$$

Apl. 4.10

Manivela ***M*** din figura Apl-4.10 se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\omega_M = 3[rad/s]$, în sens trigonometric. Să se determine vitezele unghiulare ale barelor ***T₁*** şi ***T₂*** şi viteza punctului B.

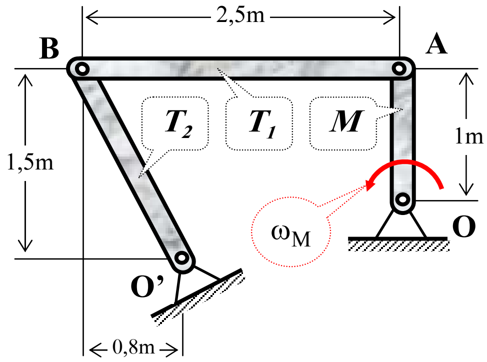


Fig. Apl-4.10

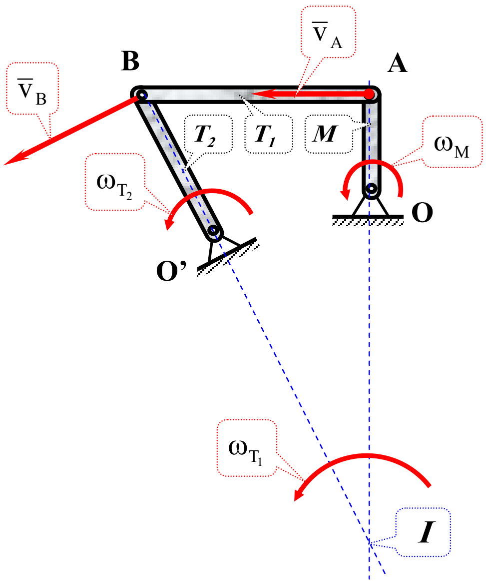


Fig. Apl-4.10.a

Rezolvare:

Mişcările elementelor componente sunt: manivela ***M*** şi tija ***T₂*** fac, fiecare mişcare de rotaţie cu axă fixă iar tija ***T₁*** mişcare plan paralelă.

Viteza punctului A (articulaţie cilindrică) ce aparţine manivelei ***M*** este: $v_A = \omega_M \cdot OA = 3 \cdot 1 = 3\,[m/s]$

Aplicăm o proprietate a distribuţiei de viteze (proiecţiile vitezelor a două puncte ale unui solid rigid, pe direcţia ce le leagă, sunt egale între ele) şi obţinem:

$$v_A \cdot \cos 0^o = v_B \cdot \cos\alpha$$

$$v_B = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot v_A = \frac{1}{1{,}5/1{,}7} \cdot 3 = 3{,}4\,[m/s]$$

♦

Viteza punctului A ce aparţine tijei ***T₁***, utilizând poziţia CIR-ului determinată în fig. Apl-4.10.a, se poate exprima şi astfel:

$$v_A = \omega_{T_1} \cdot A\,I_{T_1},$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{T_1} = \frac{v_A}{A\,I_{T_1}} = \frac{3}{4{,}688} = 0{,}64\,[\mathrm{rad/s}]\ , \qquad \blacklozenge$$

în care $A\,I_{T_1}$ s-a determinat astfel:

$$A\,I_{T_1} = \frac{2{,}5}{0{,}8}\cdot 1{,}5 = 4{,}688\,[\mathrm{m}].$$

Din mişcarea de rotaţie a tijei ***T₂*** rezultă şi viteza unghiulară ω_{T_2} , astfel:

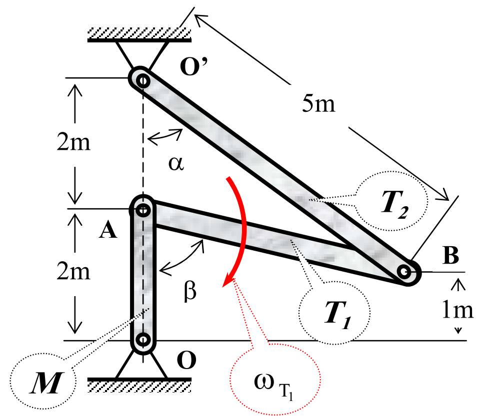


Fig. Apl-4.11

$$\omega_{T_2} = \frac{v_B}{O'B} = \frac{3{,}4}{1{,}7} = 2\,[\mathrm{rad/s}] \qquad \blacklozenge$$

Apl. 4.11

La momentul considerat, viteza unghiulară a barei(tijei) ***T₁*** din figura Apl-4.11, este $\omega_{T_1} = 2\,[\mathrm{rad/s}]$, în sens orar. Să se determine vitezele unghiulare ale manivelei ***M*** şi barei ***T₂***, şi viteza punctului B.

Rezolvare:

Tija ***T₁*** (AB) execută mişcare plan paralelă cu centrul instantaneu de rotaţie în $O' \equiv I$. Direcţiile vitezelor capetelor A şi B ale tijei ***T₁*** sunt cunoscute (fig. Apl-4.11.a), adică perpendiculare pe manivela OA respectiv tija O'B (fiecare făcând rotaţie cu axă fixă).

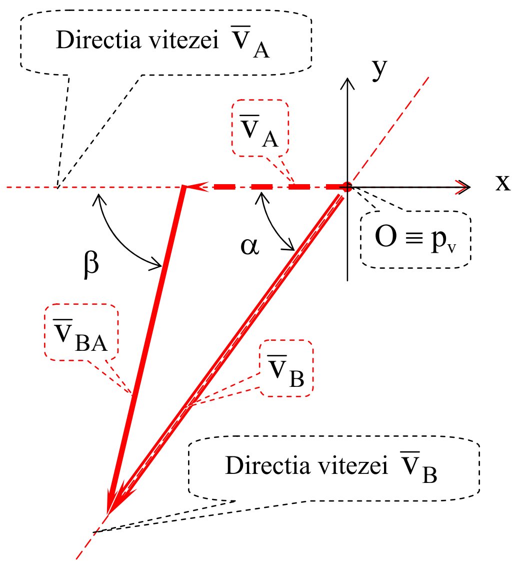


Fig. Apl-4.11.a

Relaţia vectorială între $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ este:

$$\underset{\perp O'B}{\bar{v}_B} = \underset{\perp OA}{\bar{v}_A} + \underset{\perp AB}{\underline{\underline{\bar{v}_{BA}}}} \qquad (1)$$

dar

$$v_{BA} = \omega_{T_1}\cdot AB = 2\cdot\sqrt{1^2+2^2} = 8{,}246\,[\mathrm{m/s}]$$

Reprezentăm grafic ecuaţia vectorială (1), fig. Apl-4.11.b, apoi o proiectăm pe axele sistemului de referinţă xOy şi obţinem:

$$\begin{cases} -v_B \cdot \cos\alpha = -v_A - v_{BA} \cdot \cos\beta \\ -v_B \cdot \sin\alpha = -v_{BA} \cdot \sin\beta \end{cases}$$

$$v_B = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot v_{BA} \cdot \sin\beta = \frac{1}{\sin 53{,}13^\circ} \cdot 8{,}246 \cdot \sin 75{,}96^\circ$$

$$\Rightarrow \quad v_B = 10\,[m/s] \text{ şi } v_A = 10 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 4\,[m/s] \quad \blacklozenge$$

Acum putem determina vitezele unghiulare ale manivelei ***M*** şi tijei ***T₂*** din rotaţiile lor în jurul axelor fixe corespunzătoare, astfel:

$$\omega_M = \frac{v_A}{OA} = \frac{4}{2} = 2\,[rad/s]; \quad \blacklozenge$$

$$\omega_{T_2} = \frac{v_B}{O'B} = \frac{10}{5} = 2\,[rad/s]. \quad \blacklozenge$$

Apl. 4.12.

Placa omogenă ***P*** de forma unui triunghi echilateral cu latura de 0,3 m, arătată în figura Apl-4.12, este articulată cilindric la tija ***T***(AO) ce se roteşte în

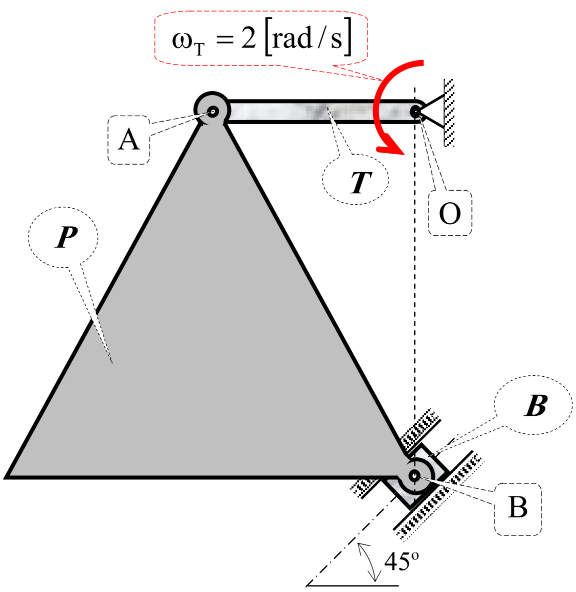


Fig. Apl-4.12

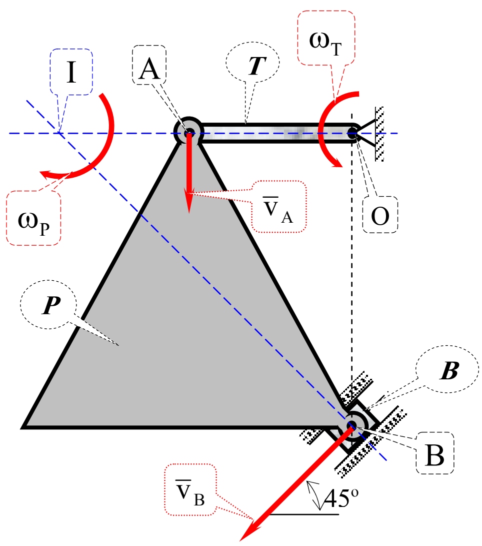


Fig. Apl-4.12.a

jurul punctului O, în sens trigonometric, cu viteza unghiulară $\omega_L = \omega_{OA} = 2\,[rad/s]$. Placa ***P*** este deasemenea articulată cilindric la blocul ***B***, prin ştiftul B, care se mişcă în canalul indicat (45^o faţă de orizontală). Să se determine viteza unghiulară a plăcii triunghiulare ***P***.

Rezolvare:

Mişcările elementelor componente sunt: tija ***T*** face mişcare de rotaţie cu axă fixă iar placa ***P*** execută mişcare plan paralelă, cu C.I.R. în I (fig. Apl-4.12.a).

Viteza punctului A (articulaţie cilindrică) ce aparţine tijei ***T*** este:

$$v_A = \omega_T \cdot OA = 2 \cdot \frac{0{,}3}{2} = 0{,}3\,[m/s].$$

Viteza punctului A ce aparţine plăcii ***P***, utilizând poziţia C.I.R determinată în fig. Apl-4.12.a, se poate exprima şi astfel:

$$v_A = \omega_P \cdot IA,$$

$$\Rightarrow \quad \omega_P = \frac{v_A}{IA} = \frac{0{,}3}{0{,}3 \cdot \cos 30^o - 0{,}3/2} = 2{,}73\,[rad/s]. \qquad \blacklozenge$$

Apl. 4.13

Cele patru bare din figura Apl-4.13, fiecare având lungimea 0,4m iar două dintre ele vitezele unghiulare indicate în figură, sunt conectate între ele şi la sistemul fix prin articulaţii cilindrice. Să se determine viteza punctului C şi vitezele unghiulare ale barelor(tijelor) $\boldsymbol{T_1}$ şi $\boldsymbol{T_2}$ pentru poziţia indicată în figură.

Rezolvare:

Pentru punctele B şi D, aparţinând manivelelor $\boldsymbol{M_1}$ respectiv $\boldsymbol{M_2}$ în

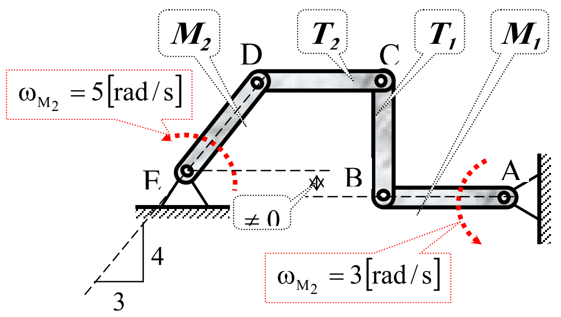


Fig. Apl-4.13

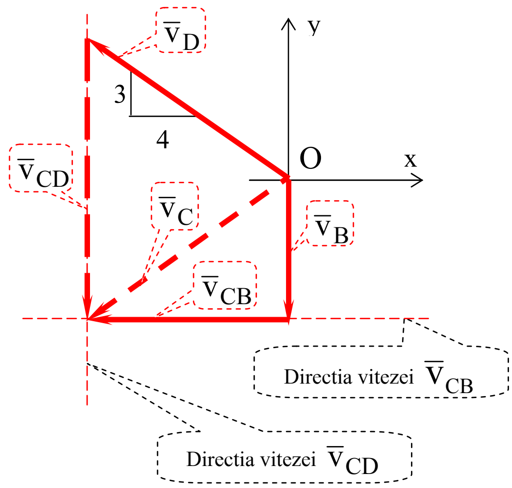


Fig. Apl-4.13.a

mişcare de rotaţie cu axă fixă în jurul punctelor A şi E, putem scrie:

$$v_B = \omega_{M_1} \cdot AB = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2\ [m/s],\ \ v_D = \omega_{M_2} \cdot ED = 5 \cdot 0{,}4 = 2\ [m/s].$$

Din mişcarea plan paralelă a fiecăreia dintre tijele BC (T1) şi CD (T2) se scriu ecuaţiile vectoriale:

- pentru punctul C (articulaţie cilindrică) ce aparţine tijei BC:

$$\overline{v}_C = \underset{\perp AB}{\underline{\underline{\overline{v}_B}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\overline{v}_{CB}}} \tag{1}$$

- pentru punctul C (articulaţie cilindrică) ce aparţine tijei CD:

$$\overline{v}_C = \underset{\perp ED}{\underline{\underline{\overline{v}_D}}} + \underset{\perp CD}{\underline{\overline{v}_{CD}}} \tag{2}$$

Comparăm relaţiile (1) şi (2), prin intermediul vectorului viteză, $\overline{v}_C$, a punctului C şi obţinem:

$$\underset{\perp AB}{\underline{\underline{\overline{v}_B}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\overline{v}_{CB}}} = \underset{\perp ED}{\underline{\underline{\overline{v}_D}}} + \underset{\perp CD}{\underline{\overline{v}_{CD}}} \tag{3}$$

Reprezentăm grafic ecuaţia vectorială (3), fig. Apl-4.13.a, apoi o proiectăm pe axele sistemului de referinţă xOy şi obţinem:

$$\begin{cases} -v_{CB} = -v_D \cdot \dfrac{4}{5} \\ -v_B = v_D \cdot \dfrac{3}{5} - v_{CD} \end{cases},\ \Rightarrow\ \ v_{CB} = \frac{4}{5} \cdot v_D = \frac{4}{5} \cdot 2 = 1{,}6\ [m/s]$$

$$\Rightarrow\ \ v_{CD} = \frac{3}{5} \cdot v_D + v_B = \frac{3}{5} \cdot 2 + 1{,}2 = 2{,}4\ [m/s]$$

Din figura Apl-4.13.a se determină mărimea vitezei punctului C (v_C):

$$v_C = \sqrt{(v_B)^2 + (v_{CB})^2} = \sqrt{(1{,}2)^2 + (1{,}6)^2} = 2\ [m/s^2], \qquad \blacklozenge$$

apoi vitezele unghiulare ale barelor (tijelor) ***T*₁** respectiv ***T*₂** :

$$\omega_{T_1} = \frac{v_{CB}}{CB} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4\ [rad/s], \qquad \blacklozenge$$

$$\omega_{T_2} = \frac{v_{CD}}{CD} = \frac{2{,}4}{0{,}4} = 6\ [rad/s]. \qquad \blacklozenge$$

4.a. ANALIZA CINEMATICĂ - SOLIDWorks - - *COSMOSMotion*

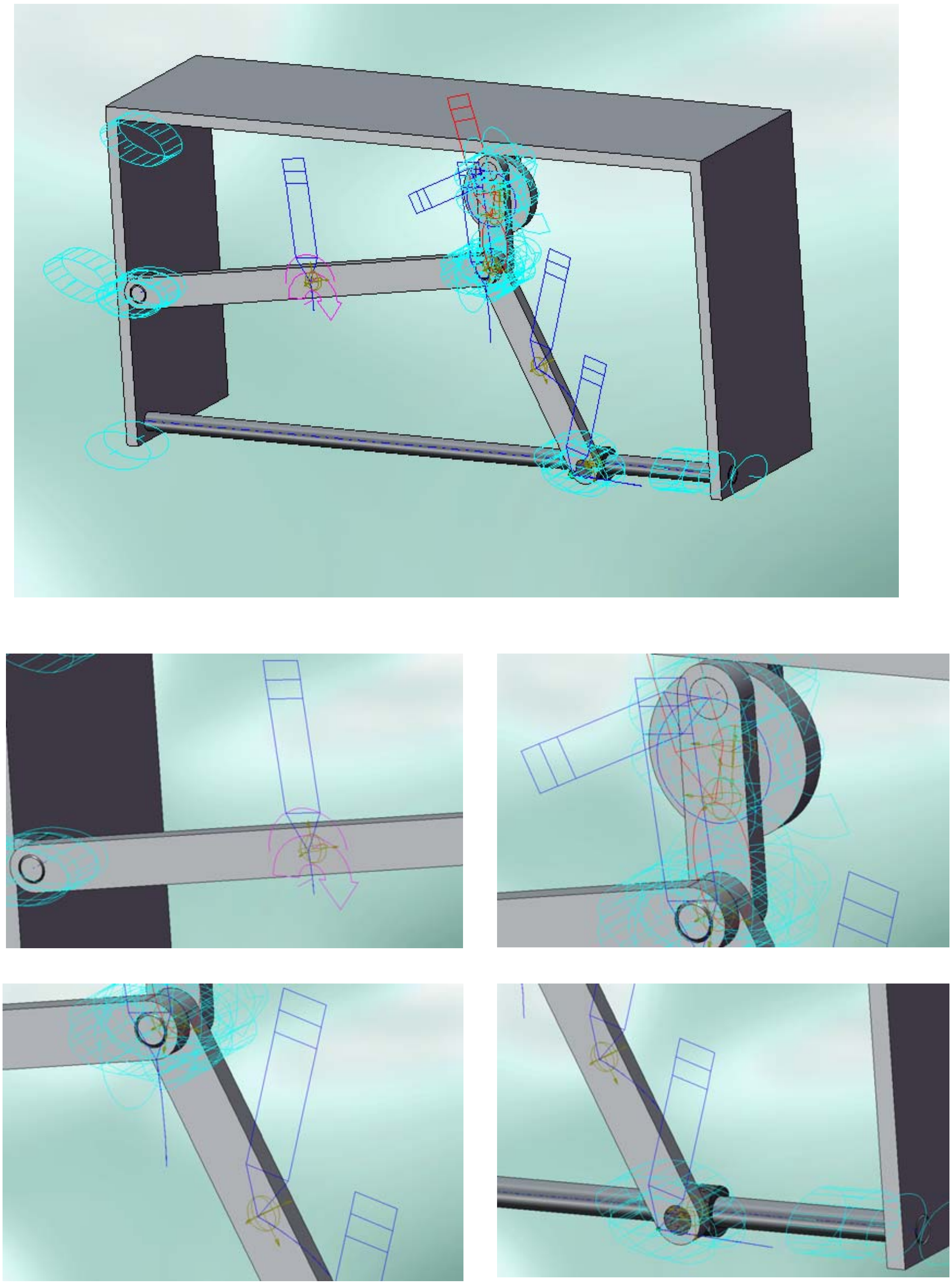


Fig. SW_4.1. Traiectoriile unor puncte ale componentelor, realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks - COSMOSMotion

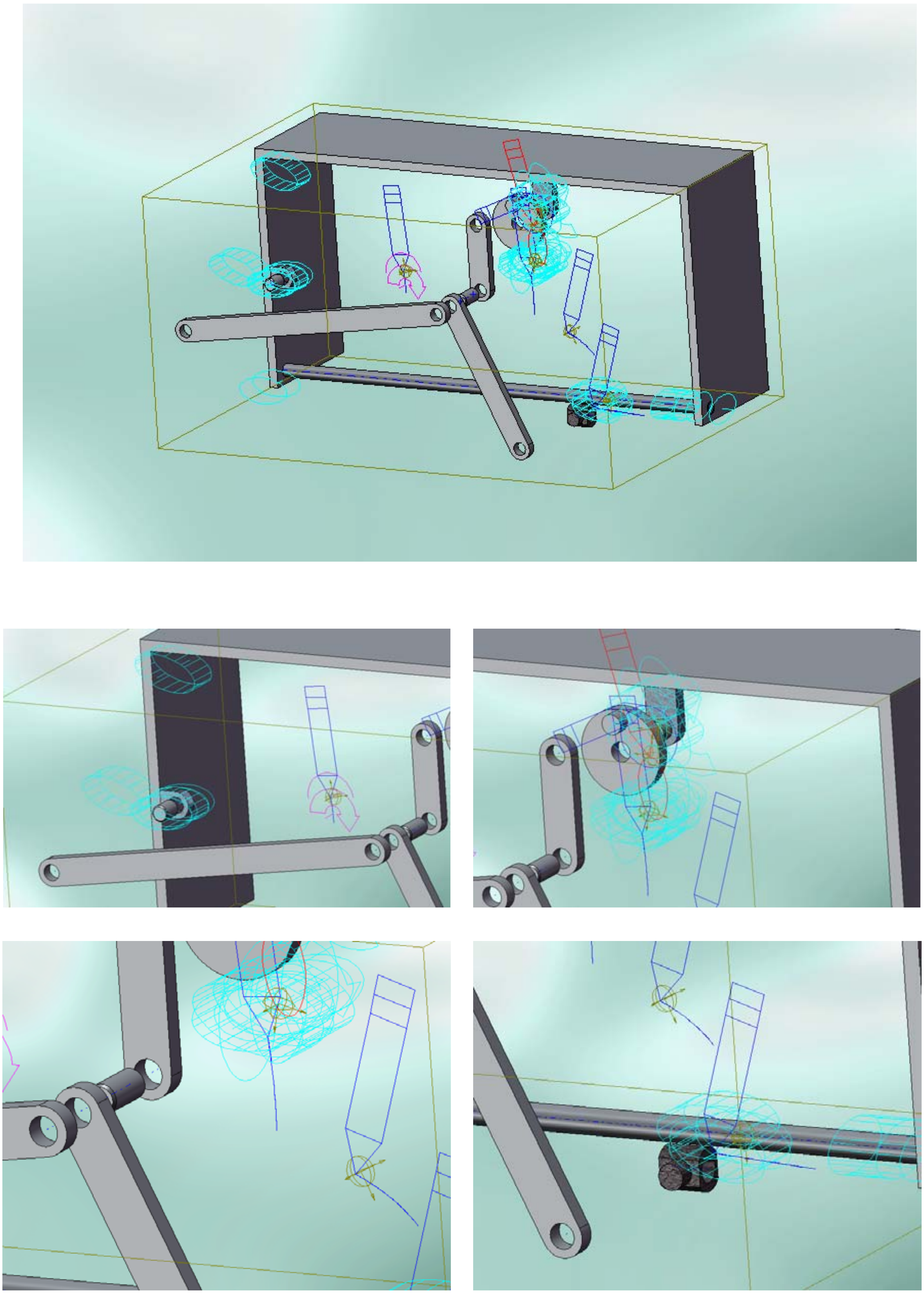


Fig. SW_4.2. Traiectoriile unor puncte ale componentelor, realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion *– reprezentate in explozie*

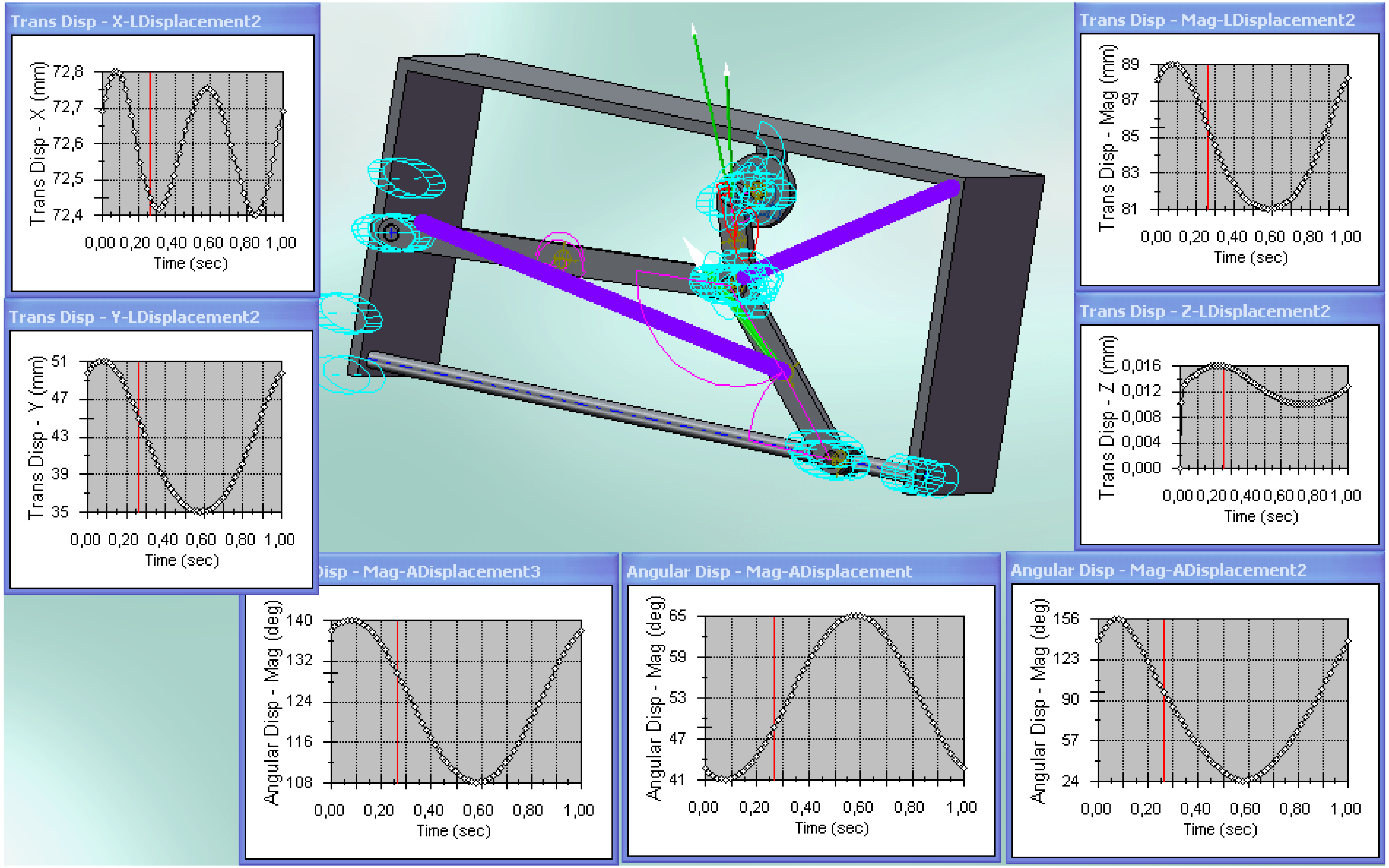


Fig. SW_4.3. Deplasarile componentelor realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion

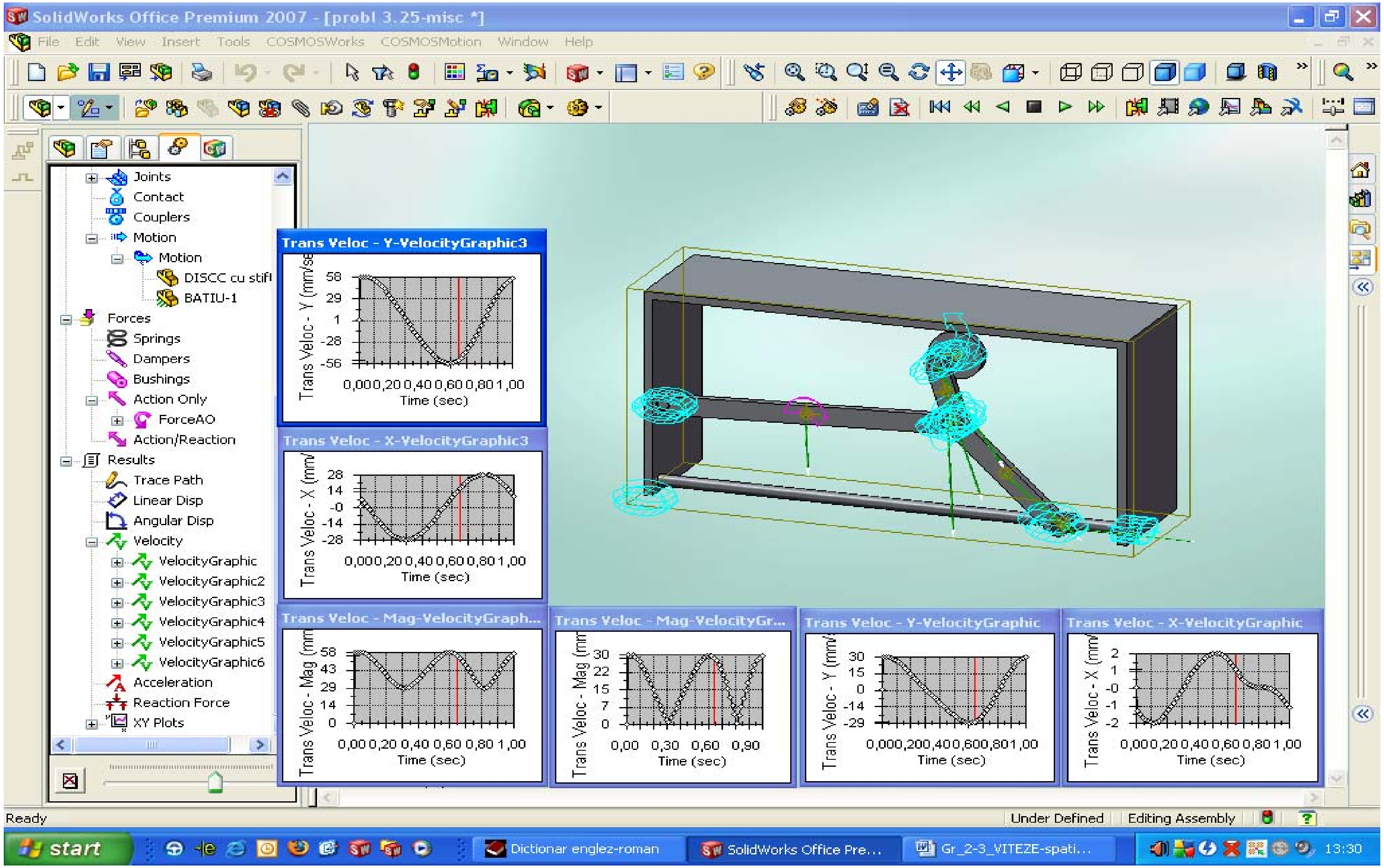


Fig. SW_4.4. Vitezele liniare pentru doua puncte din structura (proiectii pe axe si marime) realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion

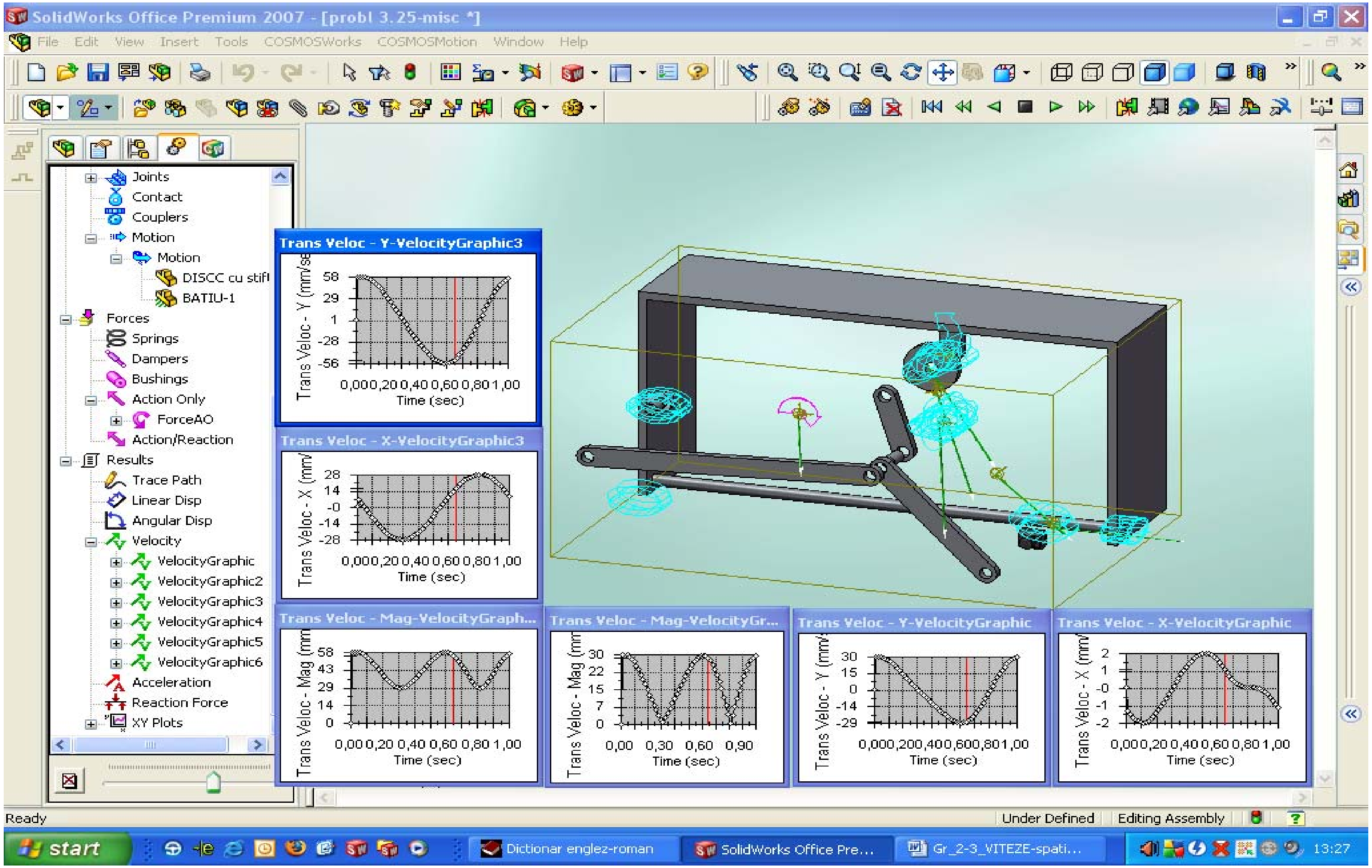


***Fig. SW_4.5. Vitezele liniare pentru doua puncte din structura (proiectii pe axe si marime) realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion**– reprezentate in explozie*

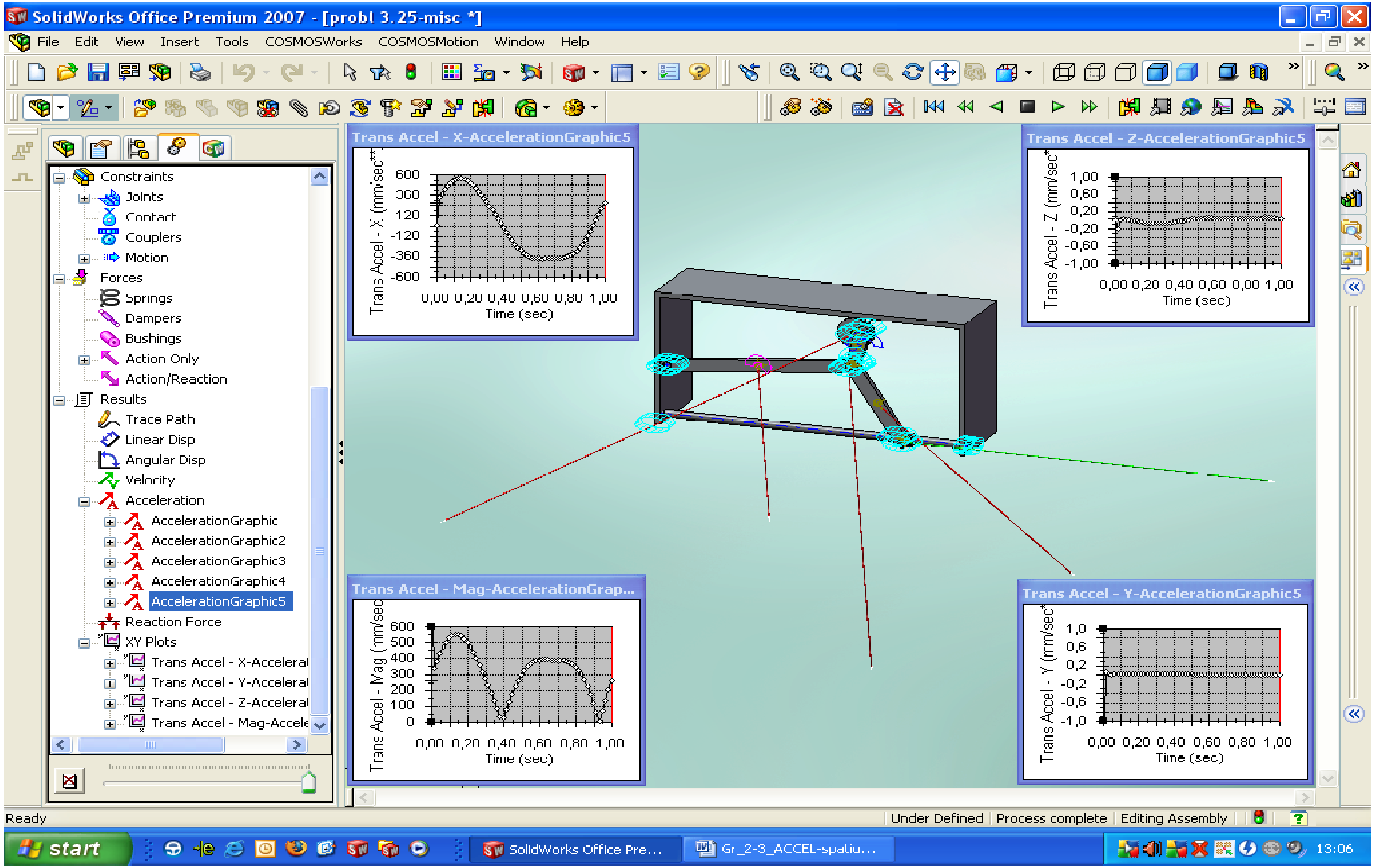


Fig. SW_4.6. Acceleratiile liniare ale bucsei in miscarea rectilinie (proiectii pe axe si marime) realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion

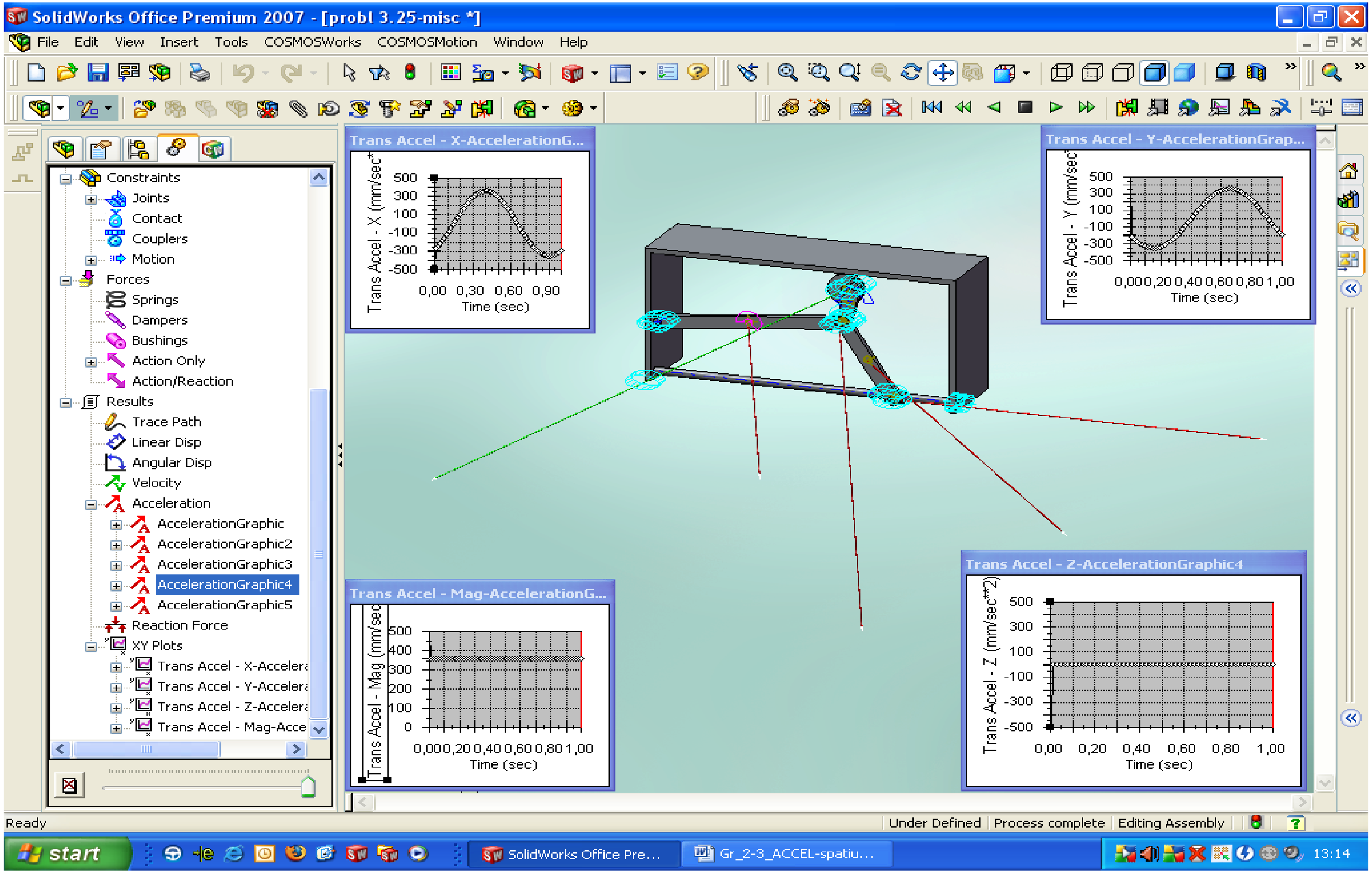


Fig. SW_4.7. Acceleratiile liniare ale stiftului de pe disc in miscarea circulara(proiectii pe axe si marime), realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion

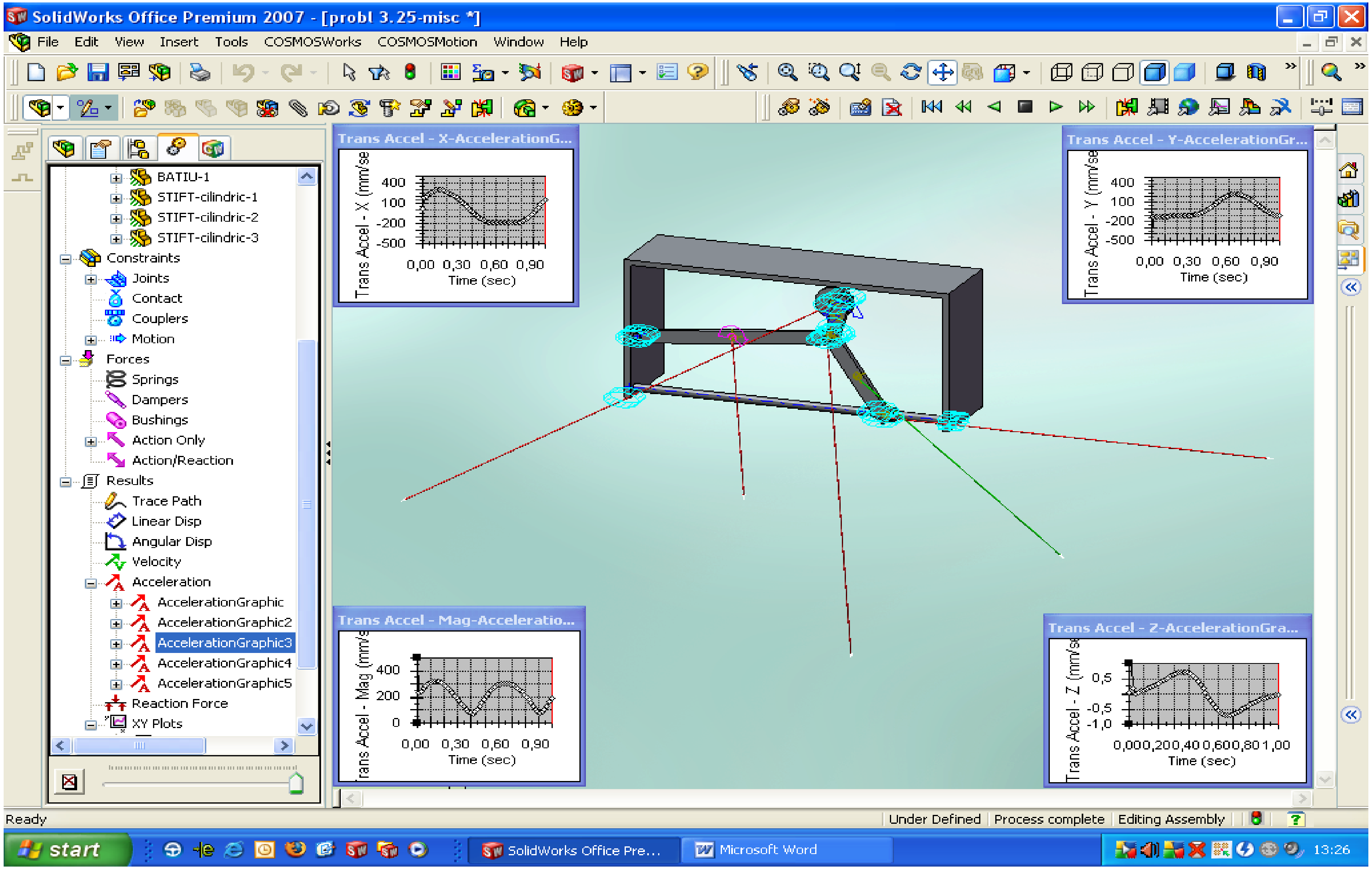


Fig. SW_4.8. Acceleratiile liniare ale centrului de greutate de pe tija in miscarea plan-paralela(proiectii pe axe si marime), realizate cu ajutorul programului SOLIDWorks – COSMOSMotion