1 NOȚIUNI INTRODUCTIVEDESPRE METODA ELEMENTELOR FINITE

1.1 Generalități

Problema analizei numerice a diverselor probleme inginereşti nu este una nouă, ea fiind utilizată de-a lungul secolelor pentru a determina diferite mărimi cum ar fi: aproximarea circumferinței unui cerc prin însumarea laturilor unui poligon înscris (sau circumscris), calcularea centrelor de greutate ale diverselor suprafețe plane etc.

Apariția şi dezvoltarea calculatoarelor a avut un foarte mare impact asupra dezvoltării metodelor numerice pentru analiza comportării structurilor complexe, dar şi pentru analiza diverselor fenomene fizice (transfer de câmp de căldură, curgeri de fluide, câmpuri electromagnetice etc.).

O clasificare a metodelor de modelare numerică se poate face din punct de vedere matematic (modelarea matematică a diverselor probleme ale mecanicii fiind independentă de natura fizică a acestor probleme) pe trei direcții principale: *metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite* şi *metoda elementelor de frontieră*.

Metoda diferențelor finite este una dintre cele mai vechi metode numerice, dar este cunoscută ca având un randament limitat. În cadrul acestei metode, punctul de plecare este modelul, descris diferențial, al fenomenului analizat, transformat în unul numeric prin utilizarea aproximării locale a variabilelor de câmp. Astfel, sistemul de ecuații diferențiale valabil pentru orice punct al domeniului de analizat se transformă într-un sistem de ecuații algebrice liniar, valabil numai pentru anumite puncte ale domeniului. Punctele se obțin cu ajutorul a două sau trei familii de drepte paralele cu axele sistemului de referință. Această metodă este limitată la calculul structurilor şi fenomenelor simple.

Metoda elementelor finite are la bază metoda matriceală a deplasărilor din analiza structurală. Această metodă a câştigat teren odată cu apariția calculatoarelor (anul 1950). Prin metoda elementelor finite se încearcă modalitatea de a găsi o soluție aproximativă la o problemă prin a admite că domeniul este divizat în *subdomenii* sau *elemente finite* având forme geometrice simple, iar funcția necunoscută a variabilei de stare este definită aproximativ pe fiecare element. Soluția completă este obținută prin combinarea formei gradelor de libertate în aşa fel încât la joncțiunea dintre elemente (în noduri) să fie satisfăcute ecuațiile de echilibru şi compatibilitatea. Spre deosebire de metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite se bazează pe aproximarea locală (pe subdomenii) a variabilelor de câmp ale gradelor de libertate. În cadrul acestei metode, ecuațiile care descriu problema având un număr infinit de grade de libertate, sunt transformate într-un sistem de ecuații cu număr finit de grade de libertate. Astfel, metoda elementelor finite este o cale foarte convenabilă de a obține soluții aproximative pentru aproape orice problemă inginerească, devenind astfel un instrument comod şi necesar în calculele de proiectare şi cercetare, eliberând utilizatorul de dificultățile legate de geometrii neregulate, neomogenități de material, condiții de contur şi inițiale complexe. Totodată, această metodă permite integrarea prin calcul numeric a ecuațiilor şi sistemelor de ecuații diferențiale pe un domeniu, ținând cont de condițiile la limită sau de contur ale unei configurații date care descrie diferite probleme şi fenomene fizice.

Metoda elementelor de frontieră, în contrast cu metoda elementelor finite, realizează discretizarea structurii numai pe conturul domeniului analizat (elemente unidimensionale pentru probleme plane şi bidimensionale pentru probleme spațiale) cu adoptarea unei variații a necunoscutelor în interiorul elementului. Această metodă poate fi aplicată numai dacă soluția fundamentală a ecuațiilor diferențiale este cunoscută. Practic, există însă multe probleme care pot fi rezolvate cu metoda elementelor finite şi nu pot fi analizate cu metoda elementelor de frontieră. Ca urmare, atunci când soluția ecuațiilor este găsită analitic, metodele numerice reprezintă un mijloc alternativ de a găsi o soluție şi a o verifica pe cea determinată analitic.

Aceste ultime două metode s-au impus datorită formulărilor simple, a caracterului de generalitate şi capacității de a se adapta cu modificări minime la analizarea diverselor probleme complexe.

1.2 Concepte în formularea metodei elementelor finite

Metoda elementelor finite este o metodă numerică utilizată la rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale care modelează sisteme fizice cu un număr infinit de grade de libertate. În urma aplicării metodei elementelor finite, aceste ecuații cu derivate parțiale sunt reduse la sisteme de ecuații algebrice, adică la un sistem discret cu un număr finit de grade de libertate.

Metoda elementelor finite este o generalizare a metodelor variaționale clasice (Rayleigh-Ritz) şi a reziduului ponderat (Galerkin), celor mai mici pătrate, colocației etc. Ideea fundamentală a metodei elementelor finite constă în faptul că domeniul dat al problemei este reprezentat ca un ansamblu de subregiuni numite *elemente finite*. Aceste elemente sunt conectate între ele prin puncte cunoscute sub numele de *noduri*. Pe domeniul elementului finit este posibil să se genereze sistematic funcții de aproximare necesare în soluționarea ecuațiilor diferențiale care descriu comportarea prin oricare din metodele variațională sau a reziduului ponderat.

Metoda elementelor finite are aplicabilitate în diverse domenii ale ingineriei (şi nu numai), unde există fenomene fizice descrise de ecuații cu derivate parțiale. Printre principalele domenii în care se poate utiliza această metodă sunt: analiza structurală, analiza fluidelor, analiza magnetică şi analiza electrică. Există trei moduri de formulare a metodei elementelor finite:

a) formularea directă;

b) formularea variațională;

c) formularea reziduală.

Formularea directă se bazează pe calculul matriceal al structurilor cu ajutorul metodei deplasărilor.

Formularea variațională are la bază minimizarea energiei potențiale, a solidului deformabil, în baza unui criteriu de staționare a energiei potențiale. Metodele variaționale utilizate în mecanica solidului deformabil folosesc principiul lucrului mecanic virtual sau teoreme energetice cum ar fi: teorema energiei potențiale minime (formularea în deplasări), formularea energiei complementare minime (formularea în tensiuni), teorema Hellinger-Reissner (formularea mixtă în tensiuni şi deformații) şi teorema lui Hamilton pentru probleme dinamice. În cazul formulării variaționale cu teorema energiei potențiale minime, corpul solid deformabil este discretizat în elemente finite, iar câmpul ipotetic al deplasărilor din interiorul fiecărui element este modelat cu ajutorul unor polinoame de interpolare. Prin minimizarea energiei potențiale a solidului deformabil, în baza unui principiu de staționare, se obține sistemul ecuațiilor de echilibru elastic nodal. Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin deplasările, deformațiile şi tensiunile corpului solid deformabil.

Formularea reziduală se poate utiliza în cazul în care nu se dispune de o formulare funcțională, acesta fiind o formulare mai generală decât formularea variațională. Pentru formularea reziduală a metodei elementelor finite, se pot utiliza: metoda celor mai mici pătrate, metoda Galerkin, metoda colocației etc.

Problemele care se pot rezolva cu ajutorul metodei elementelor finite, se pot clasifica în trei categorii:

a) probleme de echilibru, caz în care funcțiile necunoscute nu depind de timp. Acest tip de probleme apar la determinarea comportării elastice, a corpurilor solid deformabile, în regim static;
b) probleme de valori proprii, în care parametrii sunt independenți de timp, determinându-se anumite valori critice ale acestor parametri. Problemele de valori proprii apar la determinarea forțelor critice de pierdere a stabilității unei structuri sau în problemele de analiză modală a structurilor, când se determină frecvențele proprii şi modurile proprii asociate acestor frecvențe;
c) probleme de propagare, sau probleme în care funcțiile necunoscute sunt dependente de timp. Astfel de probleme apar la studiul răspunsului dinamic al unei structuri.

Datorită posibilităților de calcul pe care le oferă, metoda elementelor finite este una dintre cele mai utilizate metode în pachetele comerciale de proiectare asistată. Principalele tipuri de programe utilizate în proiectarea asistată, se pot împărți în trei categorii:

a) programe utilizate pentru modelarea geometrică a structurilor (CAD – Computer Aided Designed);
b) programe de calcul a structurilor, care au la bază metoda elementelor finite (CAE – Computer Aided Engineering);
c) programe utilizate la proiectarea tehnologică (CAM – Computer Aided Manufacturing).

Printre cele mai importante programe de analiză cu elemente finite, se numără: Ansys, Abaqus, Nastran, Cosmos, Algor etc.

Tendințele moderne în dezvoltarea metodei elementelor finite, sunt:

- dezvoltarea unor metode noi de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare mari cu matricea coeficienților – matricea rară şi simetrică;
- îmbunătățirea şi dezvoltarea algoritmilor de condensare statică şi dinamică;
- elaborarea de noi tehnici de discretizare automată, care să permită o discretizare mai fină a zonelor cu gradient mare de deformație şi să evite deformarea (distorsionarea) elementelor finite pe parcursul discretizării;
- utilizarea substructurării în cazul unor structuri mari cu grad ridicat de repetitivitate, prin translație sau rotație;
- implementarea în programele comerciale a unor algoritmi de optimizare;

- implementarea unor legi constitutive de material care să permită modelarea materialelor compozite;
- dezvoltarea elementelor finite pentru analiza multi-câmp.

Aşa cum s-a precizat şi mai înainte, se poate spune că metoda elementelor finite se bazează pe conceptul construirii obiectelor complicate din obiecte simple, sau divizarea obiectelor complicate în obiecte mai simple pentru care se pot aplica scheme de calcul cunoscute.

În foarte multe situații aparatul matematic existent nu este suficient pentru găsirea unei soluții exacte şi uneori chiar a unei soluții aproximative, pentru majoritatea problemelor practice. Ideea de bază a metodei elementelor finite este aceea de a găsi soluția unei probleme complicate înlocuind-o prin una mai simplă. Un exemplu simplu [21], dar foarte sugestiv în ceea ce priveşte rezolvarea aproximativă a unei probleme exacte îl reprezintă calculul ariei unui cerc (fig. 1.1).

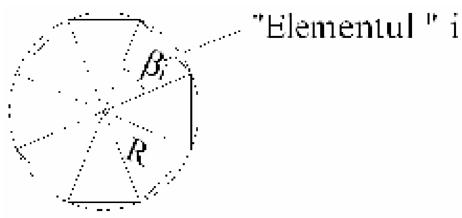


Fig. 1.1 Împărțirea suprafeței unui cerc în elemente finite

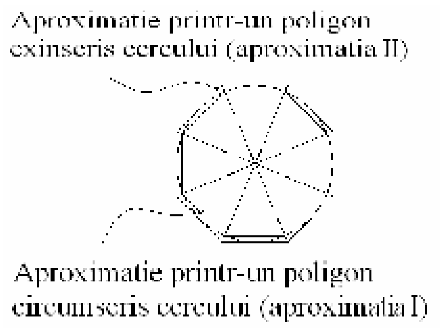


Fig. 1.2 Moduri de aproximare a ariei unui cerc

Se construieşte un poligon cu *n* laturi înscris în cercul studiat. Aria unui „element” de formă triunghiulară se calculează cu relația: $A_i = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\beta_i$. Pentru întregul poligon creat, aria se va calcula cu relația: $A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2} \cdot n \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, unde n este numărul de triunghiuri iar $\beta_i = \frac{2\pi}{n}$. La limită poligonul devine un cerc, iar relația anterioară se transformă în: $A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} \cdot n \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \pi \cdot R^2$.

La acelaşi rezultat se ajunge şi dacă aproximarea se face pornind de la un poligon circumscris cercului (fig. 1.2).

Precizia soluției depinde în mare parte, aşa cum se poate observa şi în figura 1.3, de strategia sau de modelul de calcul ales.

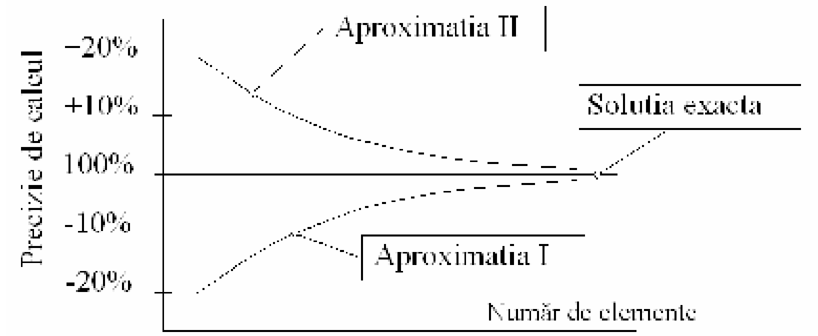


Fig. 1.3 Modul de convergență a soluțiilor pentru cele două moduri de aproximare a ariei cercului

Considerând poligonul aproximat înscris sau circumscris se poate obține limita inferioară (A^i) sau limita superioară (A^s) pentru aria reală. În continuare, odată cu creşterea numărului de laturi ale poligonului (înscris sau circumscris) valorile aproximative conduc spre valoarea reală. Se observă că ambele metode de calcul sunt convergente, diferența dintre ele fiind legată de modul de aproximare (în plus sau în minus) în raport cu soluția exactă.

În rezolvarea problemelor complexe pentru care soluțiile analitice sunt dificile datorită aparatului matematic existent, sunt cunoscute două direcții de rezolvare aproximativă:

A. utilizarea unor metode aproximative de rezolvare a ecuațiilor diferențiale pentru un model de calcul exact. Acest lucru se poate realiza astfel:

- se neglijează termenii de importanță secundară care permit în continuare rezolvarea exactă;

- se aplică metodele numerice în rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale (metoda diferențelor finite este foarte eficientă în obținerea rapidă a unor soluții acceptabile).

B. utilizarea unor metode exacte de rezolvare aplicate unor modele de calcul aproximative. Modelele aproximative de calcul se pot obține prin acceptarea unor ipoteze simplificatoare privind cea mai defavorabilă configurație a deplasărilor care respectă condițiile pe contur. După gradul de generalitate a ipotezelor utilizate, se disting două categorii de ipoteze:

- ipoteze cu caracter general, aplicabile întregului corp, cum ar fi: ipoteza secțiunilor plane şi normale (ipoteza lui Bernoulli – la bare), ipoteza normalelor rectilinii (ipoteza lui Kirckoff – plăci subțiri), ipoteza nedeformabilității conturului etc.;

- ipoteze cu caracter local, valabile pentru porțiuni mai mici sau subdomenii componente ale unei entități complexe. Este important ca aceste ipoteze să asigure continuitatea dintre subdomenii.

Se poate spune deci, că metoda elementelor finite a apărut ca o consecință a necesității de a calcula de rezistență complexe, pentru care metodele analitice de calcul sunt foarte greu de utilizat. Ideea de bază a acestei metode este că în cazul în care structura studiată se împarte în mai multe părți numite *elemente finite*, pentru fiecare dintre acestea se putându-se aplica teoriile de calcul corespunzătoare schematizării adoptate (teoria de bară, placă sau bloc). Împărțirea structurii în părți de dimensiuni mai mici, operație care poartă numele de *discretizare* va avea drept efect obținerea unor forme simple pentru elementele finite ce compun structura studiată. Modelul de calcul utilizat în analiza cu elemente finite este un model aproximativ obținut prin asamblarea elementelor finite componente, ținându-se cont de geometria structurii. Conectarea elementelor finite se realizează numai în anumite puncte numite puncte nodale sau *noduri*. Nodurile reprezintă punctele de intersecție ale liniilor de contur rectilinii sau curbe ale elementelor finite. Elementele finite pot fi uni, bi sau tridimensionale în funcție de geometria structurii pe care o modelează.

Caracterul aproximativ al metodei elementelor finite rezultă ca urmare a faptului că geometria reală a structurii este întotdeauna înlocuită cu o rețea de elemente finite care urmăreşte forma reală a structurii, dar nu o poate reda cu exactitate decât numai prin anumite geometrii particulare, datorită numărului finit de elemente iar mărimile necunoscute ale problemei sunt calculate numai în nodurile rețelei de elemente finite ce discretizează structura. De aici se poate trage o singură concluzie: precizia de calcul a acestei metode creşte odată cu creşterea numărului de elemente finite. Continuitatea rezultatelor obținute depinde de caracterul de continuitate pe care funcțiile de aproximare trebuie să le asigure la nivelul zonelor dintre elemente.

Formularea metodei elementelor finite se bazează pe exprimarea condițiilor de extrem pe care unele mărimi care intervin în fenomenul studiat trebuie să le satisfacă. Această metodă este o metodă cu un vast domeniu de aplicabilitate, bucurându-se şi de avantajul unei formulări simple. Caracterul de generalitate a metodei îi conferă avantajul de a se putea adapta, cu modificări simple, celor mai complexe şi variate probleme, cum ar fi problemele liniare şi neliniare, solicitări statice şi dinamice, structuri de bare, plăci plane sau curbe, probleme de contact, probleme de mecanica ruperii, de oboseală etc.

1.3 Noțiuni de rezistența materialelor

Rezistența materialelor are ca obiect stabilirea metodelor şi procedeelor de calcul ale eforturilor, tensiunilor şi deformațiilor ce apar în diferite puncte ale elementelor de rezistență, când asupra acestora acționează forțe, precum şi stabilirea şi utilizarea relațiilor dintre eforturi şi dimensiunile secțiunii.

Din totalitatea caracteristicilor elementelor de rezistență, în rezistența materialelor, se rețin numai acele caracteristici necesare calculului de rezistență făcând abstracție de ceilalți factori care intervin. În acest scop corpurile se schematizează în modele matematice ce au anumite caracteristici mecanice şi elastice. Ca urmare, corpurile se vor încadra în următoarele cinci modele: fir, bară, membrană, placă şi bloc. Prin aceste modele rezistența materialelor schematizează, printr-o metodă de calcul, numeroase organe de maşini şi elemente de construcții şi deci, calculul de rezistență are o largă generalizare.

În raport cu geometria lor, corpurile se împart în trei grupe [50]:

a) *Corpurile cu fibră medie*, cele ce au una din dimensiuni, lungimea, mult mai mare decât celelalte două, lățimea şi grosimea. Ele se definesc prin:
   - axa longitudinală - ce poate fi dreaptă, curbă, linie frântă, etc.
   - secțiunea transversală - ce poate fi constantă sau variabilă în lungul axei longitudinale.

Din această grupă fac parte:

- firele - care pot fi solicitate numai la întindere şi nu opun practic nici o rezistență solicitărilor transversale sau de compresiune;
- barele - care rezistă atât la solicitări axiale cât şi transversale.

După destinație şi modul de solicitare barele poartă diferite denumiri specifice: tiranți - când sunt solicitate la întindere, stâlpi - când sunt solicitate la compresiune, grinzi - când sunt solicitate la încovoiere, arbori - când sunt solicitate, în special, la torsiune.

Prin fibră medie sau axă se înțelege locul geometric al centrelor de greutate al secțiunilor plane normale pe axa barei (sau a firului), iar prin secțiune normală, secțiunea plană perpendiculară pe axă.

b) *Corpurile cu suprafață mediană* au una din dimensiuni - grosimea - relativ mică în raport cu celelalte două - lățimea şi lungimea. Din această grupă fac parte membranele şi plăcile.

- membranele, ce au grosimea foarte mică, nu rezistă la sarcini transversale sau de compresiune ci numai la sarcini de întindere.
- plăcile, plane sau curbe, pot prelua şi sarcini transversale şi de compresiune.

Exemple de plăci: capace şi pereţi de rezervoare, cupole, planşee, etc. iar de membrane: pânza de cort, membrane amortizoare etc.

c) *Blocuri sau corpuri masive,* care au dimensiunile de acelaşi ordin de mărime. Exemple: bilele şi rolele de rulment, blocurile de fundaţii etc.

Calculele de rezistenţă diferă de la o grupă la alta, ele fiind cele mai simple la fire şi la bare drepte, cresc în complexitate la barele curbe şi cadre, devenind deosebit de complicate la plăci şi blocuri.

Rezistenţa materialelor prezintă modul de determinare a eforturilor, tensiunilor şi deformaţiilor în cele mai simple şi des utilizate corpuri şi din acest motiv studiul barei drepte, de secţiune constantă sau variabilă, formează baza şi este tratată în cea mai mare parte în cursurile de Rezistenţa materialelor.

Modelul unei bare drepte (fig. 1.4,a) se schematizează ca în figura 1.4,b. Astfel, modelul barei conţine axa barei, de lungime *L* trasată cu linie groasă în figură şi secţiunea transversală, dreptunghiulară în acest caz, de lăţime *b* şi înălţime *h*. Sistemul de axe ataşat modelului, este un sistem triortogonal drept cu axa Ox - axa barei şi sistemul yOz, axele centrale principale ale secţiunii.

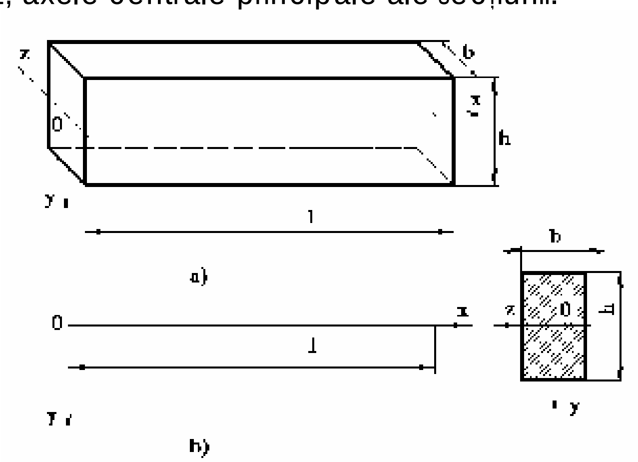


Fig. 1.4 Modul de schematizare a unei bare drepte de secţiune dreptunghiulară

Pentru a putea stabili relaţiile de calcul simple, în rezistenţa materialelor se folosesc anumite ipoteze referitoare atât la structura materialelor cât şi la comportarea lor sub acţiunea sarcinilor aplicate. Aceste ipoteze sunt uneori în concordanţă cu realitatea, iar alteori ele reprezintă simplificări ale fenomenelor reale, care duc la rezultate verificate experimental şi deci acceptabile pentru scopul rezistenţei materialelor.

Principalele ipoteze, cu care operează rezistenţa materialelor, sunt [50]:

I. Ipoteza mediului continuu, prin care se admite că materialul unui element de rezistenţă se consideră un mediu continuu ce ocupă întregul spaţiu delimitat de volumul său. Această ipoteză corespunde satisfăcător materialelor amorfe dar nu corespunde realităţii la cele cristaline. Ipoteza este necesară întrucât mărimile din rezistenţa materialelor, cum sunt tensiunile, deplasările, deformaţiile etc. pot fi scrise ca funcţii continue de punct şi nu ca funcţii discrete specifice pentru fiecare cristal sau particulă, permiţând folosirea calculului şi metodelor analizei matematice.

II. Ipoteza mediului omogen, prin care se admite că materialul elementului de rezistenţă are în toate punctele din volumul său aceleaşi mărimi fizice . Nici această ipoteză nu concordă în totalitate cu realitatea în special în cazul betonului, lemnului şi chiar al metalelor. Astfel, la metale prin diverse tratamente termice sau mecanice se creează cruste dure şi caracteristici mecanice diferite de ale miezului.

III. Ipoteza izotropiei. Materialele se consideră izotrope când au pe toate direcţiile aceleaşi caracteristici elastice *E, G* şi *n*. În caz contrar materialele se consideră anizotrope. Un caz particular de anizotropie este cel al materialelor ortotrope (lemnul).

IV. Ipoteza elasticităţii perfecte. Dacă tensiunile nu depăşesc anumite valori limită, materialele se consideră perfect elastice, ceea ce înseamnă că deformaţiile produse de sarcini se anulează odată cu anularea sarcinilor.

V. Ipoteza proporţionalităţii între tensiuni şi deformaţii specifice. În cazul solicitărilor în domeniul elastic se consideră că între tensiuni şi deformaţii specifice există o relaţie liniară, adică este valabilă legea lui Hooke.

VI. Ipoteza deplasărilor mici. În afară de unele excepţii, în Rezistenţa materialelor se consideră că deformaţiile unui element de rezistenţă sunt foarte mici în raport cu dimensiunile acestuia. Ipoteza este foarte importantă întrucât ecuaţiile de echilibru static se pot scrie raportând forţele la starea iniţială nedeformată a elementului de rezistenţă. Tot pe baza acestei ipoteze, în calculele analitice, termenii ce conţin deformaţii specifice sau deplasări la puteri superioare se pot neglija în raport cu termenii la puterea întâi (teoria de ordinul întâi).

VII. Ipoteza proporţionalităţii dintre deformaţii specifice şi deplasări. În domeniul elastic se consideră că între deformaţiile specifice şi deplasări există o relație liniară. Această ipoteză este o consecință a ipotezei deformațiilor mici.

VIII. Ipoteza secțiunilor plane (Bernoulli). Secțiunile plane şi normale pe axa barei rămân plane şi normale şi după deformarea produsă de sarcini. Această ipoteză se verifică experimental pe conturul barelor şi se admite valabilă şi în interiorul acestora.

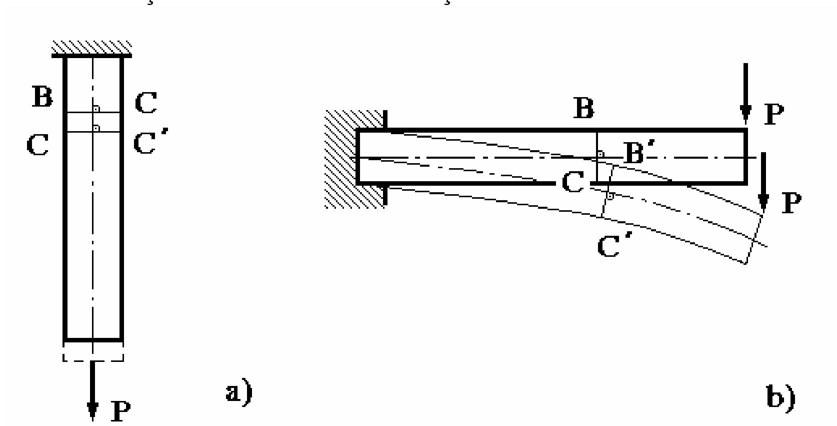


Fig. 1.5 Reprezentare grafică a ipotezei secțiunilor plane (ipoteza lui Bernoulli)

Astfel în cazul barei din figura 1.5,a, supusă la întindere, secțiunea BC se deplasează în B'C' dar rămâne plană şi normală pe axa barei. La fel pentru bara din figura 1.5,b supusă la încovoiere secțiunea BC se deplasează şi se roteşte în poziția B'C', dar rămâne plană şi normală pe axa barei.

IX. Principiul lui Saint-Venant. Dacă se înlocuiesc forțele care acționează pe o porțiune mică a elementului de rezistență cu un alt sistem de forțe echivalent din punct de vedere static cu primul, noua distribuție a forțelor produce în locul de aplicare diferențe apreciabile față de prima dar rămâne fără efect, sau cu efect neglijabil, la distanțe mari de locul de aplicare a forțelor.

X. Principiul suprapunerii efectelor. Prin aplicarea unei sarcini asupra unui element de rezistență până la limita prescrisă de proporționalitate a materialului, eforturile, tensiunile, deformațiile şi deplasările ce se produc în elementul de rezistență depind exclusiv de mărimea acelei sarcini şi nu sunt influențate de efectele altor sarcini aplicate anterior sau concomitent. Acest principiu este o consecință a legii lui Hooke (deformațiile sunt proporționale cu sarcinile) şi a ipotezei deformațiilor mici ce indică teoria de ordinul întâi.

1.4 Noțiuni despre elementele finite

1.4.1 Definiții

Elementele finite apar în procesul divizării domeniului unei structuri, indiferent de tipul analizei ce se doreşte a fi realizată (fig. 1.6).

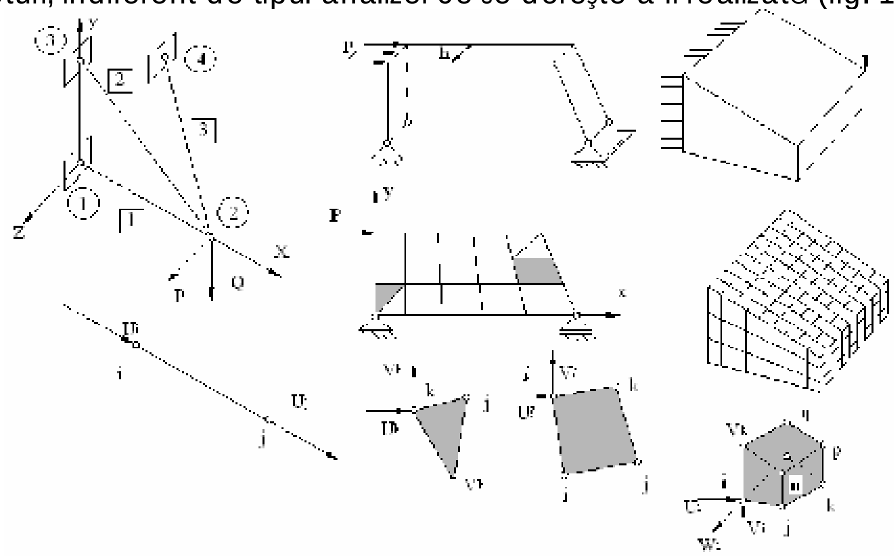


Fig. 1.6 Tipuri de rețele de elemente finite

În sens larg, un element finit reprezintă modelul de aproximare a următoarelor proprietăți:

- *geometrice (forma elementului)* caracterizat ca parte dintr-un corp cu anumite dimensiuni;
- *fizice,* elementul finit are ataşat proprietăți fizice, cum ar fi: elasticitatea, vâscozitatea, densitatea, conductibilitatea termică etc.;
- *funcționale*; aproximează una sau mai multe variabile ale problemei în funcție de valorile nodale şi funcțiile de aproximare ale problemei.

În figura 1.6 sunt prezentate câteva tipuri de structuri discretizate în elemente finite: elemente unidimensionale utilizate la structuri de tip bară (a), elemente bidimensionale triunghiulare şi patrulatere utilizate la structuri din categoria plăcilor şi membranelor (b), elemente tetraedrice şi paralelipipedice utilizate la structuri masive (c).

1.4.2 Sisteme de referință

Definirea geometrilor structurii de rezistență, a modului de comportare sub acțiunea sarcinilor, implică utilizarea unor sisteme de referință prin intermediul cărora să se realizeze o simplificare a modului de obținere a ecuațiilor algebrice aferente cazului studiat. Sunt utilizate două sisteme de referință (fig. 1.7) şi anume [11]:

- *sistemul global de referință,* (pentru întreg domeniul discretizat în elemente finite), care este un sistem triortogonal drept prin intermediul căruia este definită geometria structurii, modul în care este constrânsă şi modul în care este încărcată cu sarcini. Tot la sistemul global de axe sunt raportate rezultatele privind modul de deformare al structurii.

- *sistemul local de referință,* (care este ataşat fiecărui element finit în parte), este utilizat la definirea deplasărilor nodale, a forțelor care acționează în nodurile elementului finit. Tot în sistemul local de axe se definesc ecuațiile de echilibru ale fiecărui element finit. Utilizarea sistemelor locale de referință este impusă de obținerea unor relații de calcul cât mai simple.

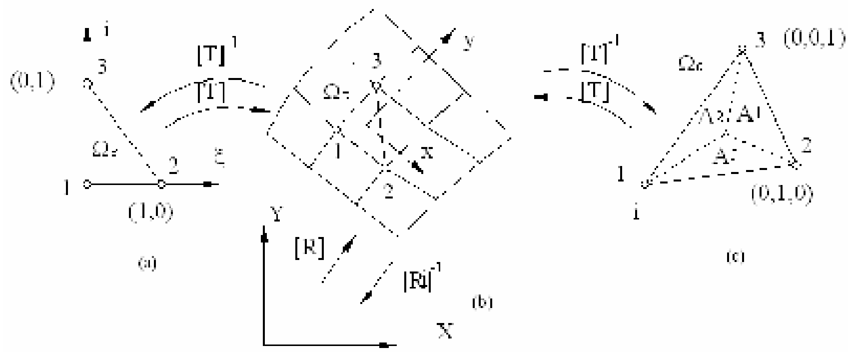


Fig. 1.7 Elemente finite în raport cu sisteme de coordonate locale (a şi c) şi în raport cu sistemul de coordonate global (b)

Sistemele de coordonate locale pot fi grupate în următoarele categorii:

- normale care la rândul lor se clasifică în: cartezian (fig. 1.8,a), cilindric (fig. 1.8,b) şi sferic (fig. 1.8,c) având originea în unul din nodurile sau centrele de greutate ale elementului; trecerea de la sistemul de coordonate global la cel local sau invers se face cu matricea de transformare *[T]*, respectiv *[T]*$^{-1}$.

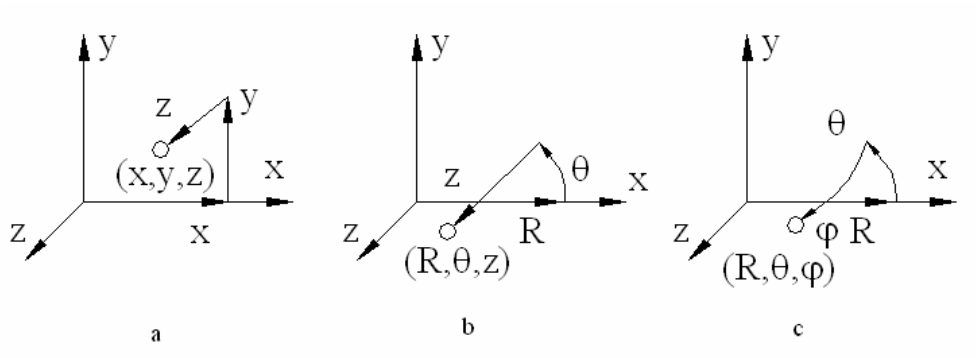


Fig. 1.8 Tipuri de sisteme de coordonate: a – cartezian, b – cilindric, c - sferic

- specifice (naturale – obținute prin raportarea coordonatelor globale la mărimi caracteristice ale elementului – lungimi, arii sau volume); în această categorie pot intra următoarele sisteme de coordonate:

1. coordonate ξ- natural cu originea în centrul elementului având intervalul de variație [-1,1]; acest sistem este preferat la elementele patrulatere sau paralelipipedice;

2. coordonatele L– natural, unde intervalul de variație este [0,1]; acest sistem este utilizat pentru elemente finite triunghiulare şi tetraedrice.

1.4.3 *Tipuri de elemente finite*

Se poate face o clasificare a elementelor finite în funcție de mai multe criterii, aşa cum se va arăta şi în prezentul paragraf.

În funcție de geometria structurii analizate, sunt utilizate următoarele forme de elemente finite:

a) *unidimensionale* – pentru structuri din bare articulate, grinzi cu zăbrele, cadre plane şi spațiale etc. (fig. 1.9,a,b,c);
b) *bidimensionale* – pentru plăci, membrane, rezervoare şi pot avea formă triunghiulară sau de patrulater (fig. 1.9,d,e);
c) *tridimensionale* – pentru corpuri masive şi pot avea formă de tetraedru, paralelipiped sau cub (fig. 1.9,f,g).

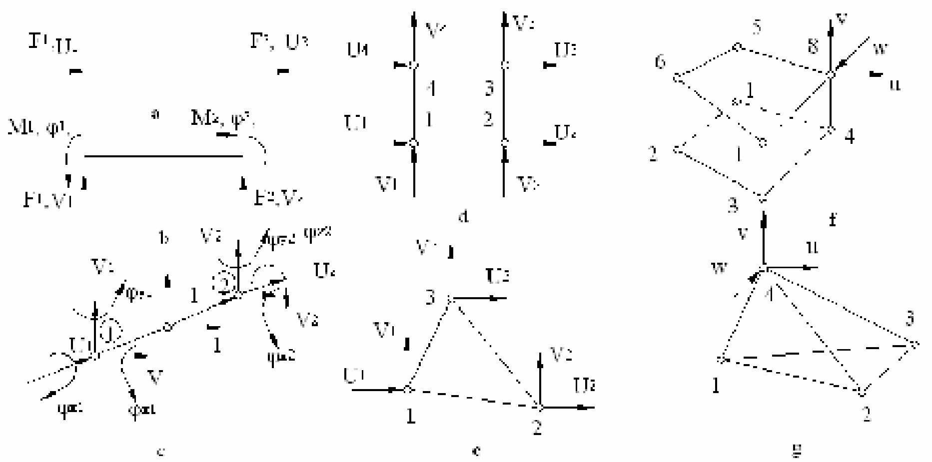


Fig. 1.9 Tipuri de elemente finite

În funcție de numărul gradelor de libertate pe fiecare nod, se pot distinge următoarele categorii de elemente finite:

a) *cu un grad de libertate pe nod* – cazul structurilor (barelor) solicitate uniaxial (fig. 1.9,a);

b) *cu două grade de libertate pe nod* – cazul structurilor plane solicitate în planul structurii, pentru structuri din bare articulate, grinzi cu zăbrele, cadre plane şi spațiale etc. (fig. 1.9,b,c,d,e);

c) *cu trei grade de libertate pe nod* (fig. 1.9,f,g).

Aproximările geometrice ale elementelor finite sunt controlate de numărul de noduri utilizate la exteriorul elementului pentru a defini forma, în timp ce aproximările fizice sunt controlate de numărul de noduri (din interior şi exterior) ale elementului, utilizându-se la definirea lor diferite funcții de interpolare.

În funcție de aproximările fizice şi geometrice există trei categorii de elemente finite [11]:

a) *subparametrice* $m < n$ (fig. 1.10,c,f), unde m este gardul funcțiilor de interpolare N_i iar n este gradul funcțiilor de forma N_i';

b) *izoparametrice* $m = n$ (fig. 1.10,b,e) în aceleaşi puncte nodale sunt utilizate aceleaşi funcții pentru a defini geometria şi variabilele de stare ale elementului finit;

c) *superparametrice* $m > n$ (fig. 1.10,a,d)

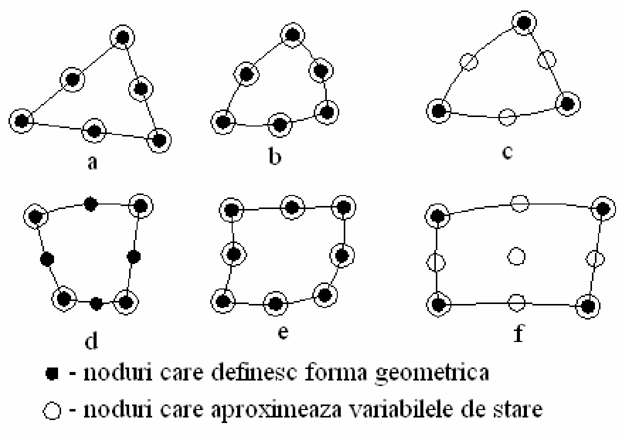
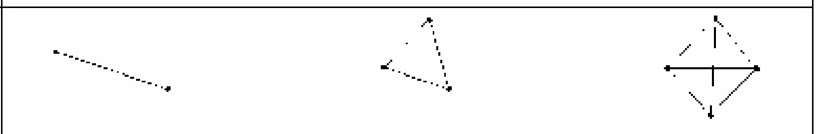
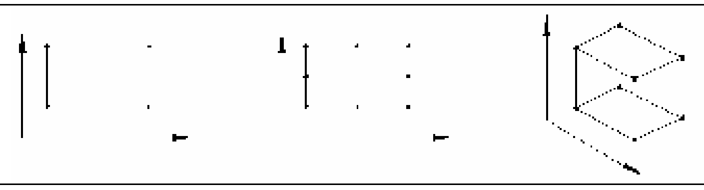


Fig. 1.10 Modul de definire a elementelor prin noduri

Din punct de vedere al calculelor, elementele finite pot fi clasificate în trei mari grupe [20]: simple, complexe şi multiplu complexe (tab. 1.1).

Tab. 1.1 Clasificarea elementelor finite

Tipul elementului finit	Forma elementului finit
Simplu	
Complex	
Multiplu complexe	

1.4.4 *Funcţii de aproximare ale elementelor finite*

Determinarea formei şi a deplasării nodurilor elementelor finite se poate face cu ajutorul funcţiilor de interpolare în raport cu coordonatele globale.

Condiţiile ce trebuie să le îndeplinească funcţiile de aproximare (în cazul în care au derivate până la ordinul k+1) pentru a asigura convergenţa la micşorarea elementelor finite sunt:

- continuitatea, care să asigure variații mici pentru parametrul necunoscut pe tot domeniul elementului finit, inclusiv pe frontiera acestuia. De exemplu dacă elementul finit are în noduri doar deplasări, funcția de aproximare trebuie să fie continuă adică de clasa C^0 – funcție generalizată de tip Lagrange, iar în cazul în care elementul finit are în noduri atât deplasări cât şi rotiri, este necesar ca funcția de aproximare şi prima ei derivată să fie continue, adică de clasă C^1 – funcție generalizată de tip Hermite;

- compatibilitatea, adică în timpul modificării domeniului problemei de-a lungul frontierei comune, elementele finite să nu trebuiască să se separe, iar valorile funcțiilor de aproximare pe frontiera comună să depindă numai de necunoscutele din nodurile de pe această frontieră;

- completitudinea, care este asigurată de modul cum sunt alese funcțiile de aproximare; de exemplu în mecanica solidului deformabil, funcția de aproximare care satisface condițiile de completitudine conține moduri ale deplasărilor care fac posibil să se descrie atât comportarea de corp rigid cât şi de deformații constante;

- invariația, care reprezintă proprietatea elementului finit de a avea aceeaşi stare fizică indiferent de orientarea axelor locale în raport de care această stare este formulată.

Polinoamele reprezintă principala categorie de funcții de aproximare utilizată în cadrul metodei elementelor finite şi pot fi grupate în următoarele categorii:

A. polinoame simple, care asigură o descriere analitică a domeniului comportării elementului şi facilitățile de a efectua un control asupra aproximațiilor;

B. polinoame de tip Lagrange, care permit delimitarea coeficienților polinomului în raport cu valorile funcției în punctele de pe o linie;

C. polinoame de tip Hermite, care sunt utilizate pentru a satisface atât funcția cât şi derivata sau derivatele acesteia în nodurile elementelor finite.

Forma generală a unui polinom, scrisă matriceal, este:

$$u \cong \tilde{u}(x,y,z) = [\Phi(x,y,z)] \cdot \{\delta\} \qquad (1.1)$$

unde: $[\Phi(x,y,z)]$ este o matrice linie de polinoame iar matricea coloană $\{d\}$ este o matrice care conține coeficienții necunoscuți sau parametrii generalizați.

1.5 Etape de calcul a structurilor cu metoda elementelor finite

Analiza diverselor structuri din punct de vedere al rezistenței cu ajutorul metodei elementelor finite are la bază două metode de calcul şi anume:

- metoda forțelor, la care necunoscutele sunt forțele care iau naştere în nodurile modelului fizic al structurii, atunci când aceasta este supusă unei încărcări oarecare;

- metoda deplasărilor, la care necunoscutele sunt deplasările care iau naştere în nodurile modelului fizic al structurii, atunci când aceasta este supusă unei încărcări oarecare.

Dintre cele două metode enunțate, se utilizează cu precădere metoda deplasărilor datorită avantajelor oferite la calculul matriceal. În consecință în continuare se va face referire numai la această metodă de calcul.

Având în vedere cele menționate mai sus, etapele de bază în analiza cu elemente finite sunt:

1. Modelarea domeniului problemei;
2. Discretizarea domeniului dat al problemei care cuprinde:
    - o construcția rețelei de elemente finite;
    - o numerotarea nodurilor şi a elementelor;
    - o generarea proprietăților geometrice (coordonate, aria secțiunii transversale etc.).
3. Derivarea ecuațiilor elementelor finite:
    - o formularea variațională sau diferențială pentru descrierea comportării corpului solid solicitat;
    - o calculul deplasării în funcție de deplasările din noduri:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot N_i \tag{1.2}$$

şi înlocuirea acestora în δ pentru determinarea ecuației elementului finit:

$$\{F^e\} = [k^e] \cdot \{u^e\} \tag{1.3}$$

    - o derivarea sau alegerea funcțiilor de interpolare N_i din literatura de specialitate şi calculul matricelor elementului.
4. Asamblarea ecuațiilor elementelor finite:
    - o identificarea condițiilor de continuitate între elementele finite adiacente prin variabile primare (relația între gradele de libertate locale şi gradele de libertate globale);
    - o identificarea condițiilor de echilibru între variabilele secundare (relațiile dintre componentele locale şi componentele globale).

5. Introducerea condițiilor de contur şi reducerea sistemului de ecuații care descrie comportarea unui solid;
6. Rezolvarea sistemului de ecuații care descrie comportarea structurii studiate;
7. Postprocesarea.

1.5.1 Modelarea geometrică a domeniului problemei

În cadrul acestei etape se face o schematizare a structurii, se descriu condițiile de contur şi proprietățile în raport cu un sistem de coordonate ortogonal.

În mecanica solidului deformabil corpurile (structurile) sunt schematizate cu: linii drepte sau curbe (ce reprezintă axa mediană) pentru bare, suprafețe plane sau curbe (ce reprezintă suprafața mediană) pentru plăci şi membrane, volume pentru corpuri masive, ceea ce permite o reprezentare simplificată a majorității structurilor studiate.

Înainte de modelarea structurii studiate este important să se aibă în vedere următoarele aspecte:

a) tipul de analiză (statică, dinamică, modală etc.);
b) ipotezele posibile de a fi aplicate în vederea simplificării modelului (simetria (fig. 1.11), care poate fi axială, plană, ciclică sau repetitivă);
c) modul de discretizare în funcție de tipul elementelor finite;
d) schimbarea acțiunilor exterioare;
e) stabilirea condițiilor de contur şi frontieră;
f) precizia de calcul.

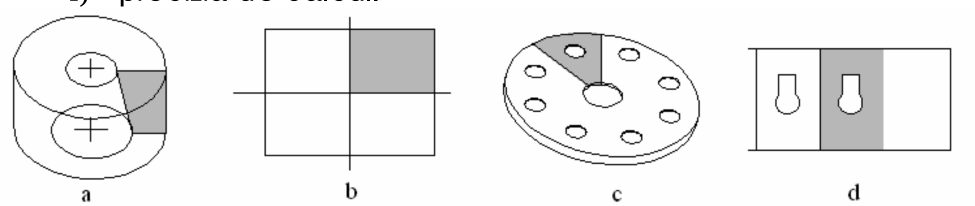


Fig. 1.11 Exemple de simetrii [20]

Prin urmare, la analiza stărilor de solicitare a diverselor corpuri solide este necesar ca utilizatorul acestei metode să:

- modeleze pe o hârtie corpul (structura) ce urmează a fi analizată;
- stabilească liniile, suprafețele şi volumele corpului, având în vedere discretizarea distinctă în elemente finite datorită proprietăților diferite de material şi/sau proprietăților geometrice diferite (secțiuni şi grosimi diferite);
- separe în regiuni, suprafețe sau volume corpul analizat;
- mențină continuitatea modelului.

1.5.2 Discretizarea modelului

Discretizarea (împărțirea) în elemente finite este echivalentă cu înlocuirea domeniului (fig. 1.12,a) cu subdiviziuni (elemente finite) de mărime finită, interconectate în noduri (fig. 1.12,b), având o geometrie simplă (linii drepte şi curbe în cazul problemelor unidimensionale, triunghiuri sau dreptunghiuri în cazul problemelor bidimensionale şi tetradere sau elemente paralelipipedice pentru probleme tridimensionale).

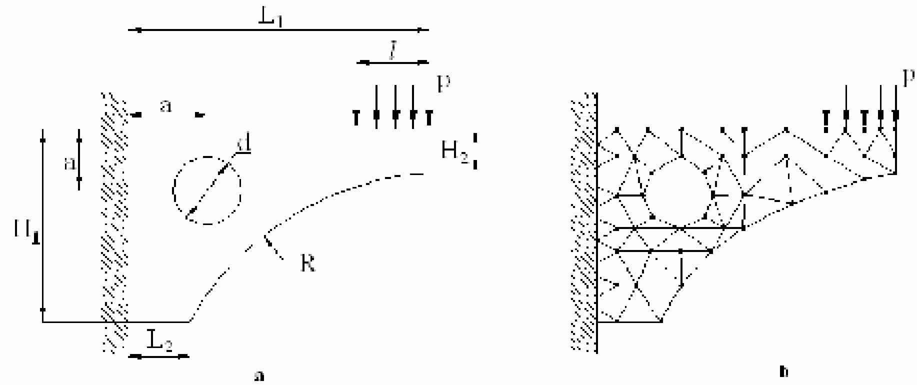


Fig. 1.12 Exemplu de structură plană a – geometria structurii, b – structura discretizată

Un astfel de element finit are un număr de puncte nodale cu un anumit număr de grade de libertate. Localizarea lor în spațiu este dată prin intermediul coordonatelor relative la un sistem de coordonate local sau global. Forma fiecărui element finit este definită prin coordonatele nodurilor şi prin funcții de interpolare. În cadrul acestei etape trebuiesc parcurse următoarele subetape:

- construirea rețelei de elemente finite, care depinde de capacitatea calculatorului, prețul de cost şi de acuratețea dorită pentru rezultatele obținute;
- numerotarea nodurilor şi a elementelor;
- generarea proprietăților geometrice şi fizice necesare rezolvării problemei.

Construcția rețelei de elemente finite este influențată de factori ca: tipul elementelor finite, mărimea acestora şi numărul de elemente finite utilizate la discretizarea structurii studiate.

De cele mai multe ori tipul elementelor finite utilizate depinde de problema fizică. De exemplu, la analiza grinzilor cu zăbrele (care sunt supuse la tracțiune-compresiune), se vor utiliza elemente de tip bară, în timp ce la bare foarte scurte solicitate la încovoiere se vor utiliza elemente finite de tip solid. Mărimea elementelor are influență asupra convergenței soluției. Astfel, dacă elementele finite sunt de dimensiuni mici, soluția obținută este mai apropiată de cea exactă. În același timp rezultatul este influențat și de raportul dimensiunilor semnificative ale elementelor finite bidimensionale și tridimensionale, motiv pentru care se recomandă evitarea formelor alungite, iar raportul dimensiunilor semnificative să fie cât mai aproape de valoarea unitară. În ceea ce privește gradul de uniformitate al rețelei de elemente finite, se recomandă o discretizare uniformă a structurilor studiate.

Dimensiunile sistemului de ecuații algebrice, la care se ajunge în urma asamblării matricelor de rigiditate elementare, depinde nu numai de dimensiunile acestora ci și de numărul și de modul de numerotare a nodurilor rețelei de elemente finite. Lățimea de bandă (fig. 1.13, a) a matricei de rigiditate globală a structurii se poate calcula cu expresia următoare [22]:

$$Lb = gln \cdot (dif.max + 1) \tag{1.4}$$

unde:

- *Lb* este valoarea lățimii de bandă a matricei de rigiditate a structurii;
- *gln* este numărul gradelor de libertate pe nod;
- *dif.max* este cea mai mare diferență dintre numerele nodurilor ce aparțin aceluiași element finit.

De asemenea, numărul de ecuații corespunzătoare matricei de rigiditate a unei structuri care are un număr total de noduri *ntd*, se poate determină cu relația: $nec = gln \times ntd$.

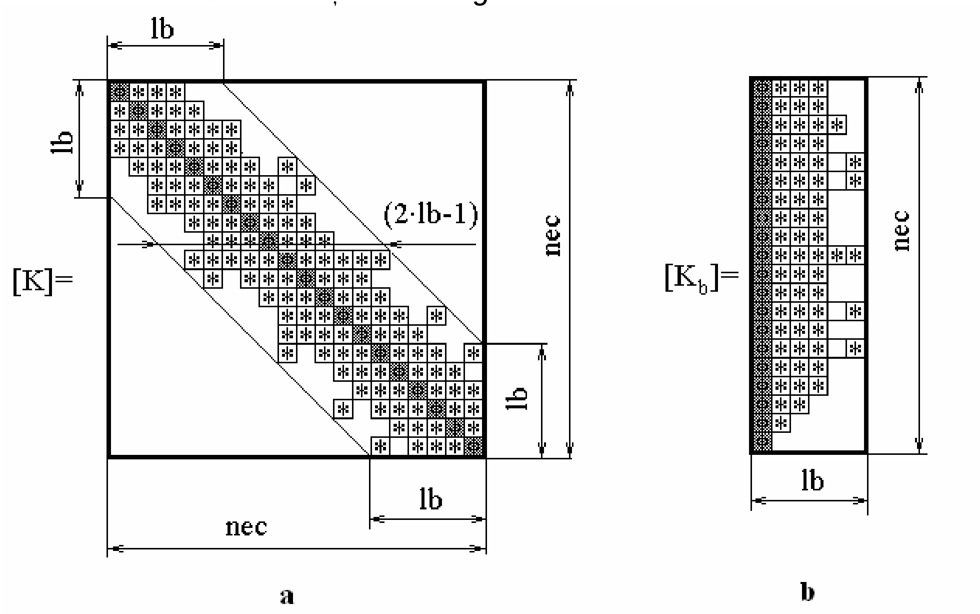


Fig. 1.13 Lățimea de bandă

La structurile cu un număr mare de noduri, matricea globală de rigiditate ajunge la dimensiuni foarte mari și drept urmare apar probleme cu stocarea termenilor matricei în memoria calculatorului. Această problemă se poate rezolva dacă se iau în considerare proprietățile de simetrie şi de bandă ale matricei, prin utilizarea numai a unei porțiuni din matrice, care cuprinde termenii diagonalei principale şi cei ce se găsesc deasupra acesteia până la limita benzii.

În figura 1.13,b este reprezentată schematic porțiunea din matricea de rigiditate care este utilizată pentru calcul. Utilizând acest procedeu de stocare a matricei de rigiditate se obține o importantă economie de memorie.

Astfel dacă luăm exemplul unei structurii cu un număr de *ntd* = 200 noduri şi care are un număr de *gln* = 3, grade de libertate pe nod, va rezulta un număr de *nec* = 600 ecuații. Matricea de rigiditate a structurii $[K_g]$, va avea un număr de *ntt* = 180.000 termeni.

Dacă se presupune că cea mai mare diferență dintre numerele nodurilor ce aparțin aceluiaşi element finit este *dif.max* = 10, va rezulta, o lățime de bandă *Lb* = 33, iar formatul bandă al matricei $[K_b]$ va avea un număr total de termeni *ntt* = 6.600, ceea ce reprezintă 7,34% din numărul de termeni ai matricei $[K_g]$ de rigiditate a structurii.

Lățimea de bandă este un indicator de bază la stabilirea necesarului de memorie pentru înmagazinarea matricei bandă şi drept urmare este necesar să se obțină valori mici ale lățimii de bandă. Această cerință se realizează printr-o optimizare a schemei de numerotare a nodurilor structurii, astfel încât să se obțină o valoare minimă a diferenței dintre numerele nodurilor corespunzătoare elementelor finite.

Pentru a exemplifica cele menționate mai sus se consideră structura din figura 1.14 [22]. Pentru structura din figura 1.14,a, diferența maximă este *dif.max*=6-1=5 şi este la elementul finit numărul 1. Se obține în acest caz pentru lățimea de bandă valoarea: *Lb* = 2(5+1)=12. Pentru aceiaşi structură, dar numerotată ca în figura 1.14, b, diferența maximă este *dif.max* = 4-1=3 şi este la elementele finite 1, 5 şi 9. Se obține în acest caz pentru lățimea de bandă valoarea: *Lb*=2(3+1)=8.

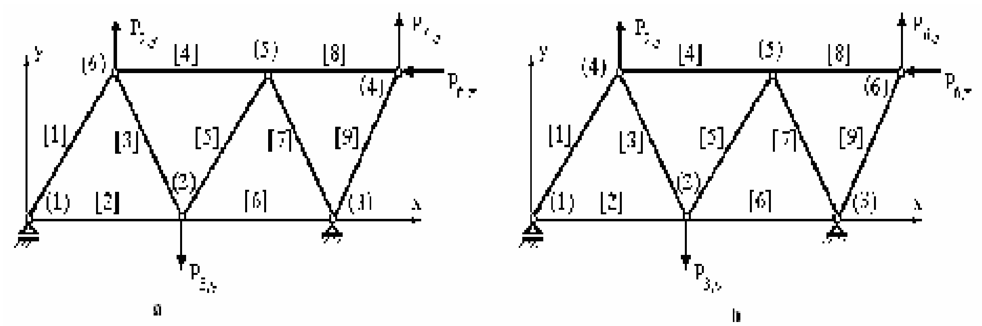


Fig. 1.14 Exemplu de numerotare a nodurilor pentru o structură de tip grindă cu

Se observă că matricea bandă a structurii din figura 1.14,a are o lățime de bandă cu 50 % mai mare decât matricea bandă a structurii din figura 1.14,b.

Realizarea unei numerotări optime se realizează atunci când numerotarea nodurilor se face acordând prioritate direcției în care sunt mai puține noduri.

1.5.3 Formularea problemei şi stabilirea ecuației elementului finit

La stabilirea ecuației elementului finit se vor parcurge următoarele etape:

- formularea ecuației diferențiale care descrie comportarea elementului finit;

- alegerea funcțiilor de aproximare pentru fiecare element finit, în general sub forma unor poligoane algebrice (de regulă soluții ale ecuațiilor din teoria elasticității şi plasticității) care sunt obținute cu teoria interpolării;

- determinarea ecuației elementului, evaluarea matricelor şi vectorilor caracteristici.

În mecanica solidului deformabil, ecuația de echilibru pentru elementul finit exprimă legătura dintre matricea coloană a deplasărilor nodale şi vectorul forțelor echivalente aplicate în nodurile elementului prin intermediul matricei de rigiditate elementare.

În general pentru a descrie o problemă fizică, există două formulări matematice echivalente: *diferențială* şi *variațională*. De exemplu pentru o structură solicitată axial descrierea comportării se poate face astfel:

Prin formularea diferențială se scrie ecuația diferențială:

$$\frac{d}{dx}\left(EA\cdot\frac{du}{dx}\right)=p \qquad (1.5)$$

unde: *p* este sarcina axială, iar produsul *EA* este rigiditatea la solicitarea axială.

Prin formularea variațională, când se caută să se minimizeze funcția:

$$\Pi = U + V = \int_V \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\cdot\{\varepsilon\}dV - \int_0^L p(x)\cdot u(x)dx \qquad (1.6)$$

unde: $\{\sigma\}$ este matricea vector coloană a tensiunilor, iar $\{\varepsilon\}$ este matricea vector coloană a deformațiilor.

Într-o definiție mai largă, se poate spune că un element finit este un model de aproximare a proprietăților fizice, geometrice şi funcționale ale unei structuri. Geometric elementul finit reproduce părți dintr-un domeniu într-o formă idealizată. Elementul finit are dimensiuni şi i se ataşează proprietăți fizice (elasticitate, densitate, vâscozitate etc.). Din punct de vedere fizic elementul finit aproximează variabilele problemei (deplasarea, tensiunea etc.).

În stabilirea ecuațiilor elementelor finite trebuie să se țină cont de:

- tipul de element finit (unidimensional, bidimensional sau tridimensional) care se stabileşte în funcție de forma şi dimensiunile structurii studiate;
- sistemul de coordonate la care se raportează;
- variabilele de stare din dreptul nodurilor;
- funcțiile de aproximare pentru tipul de element finit utilizat pentru a descrie forma şi variația necunoscutelor (variabilelor de stare) pe domeniul studiat;
- modul de stabilire a ecuației elementului finit.

1.5.4 Asamblarea matricelor de rigiditate

Asamblarea este un proces de reunire a elementelor finite şi de sinteză a domeniului studiat, care se face:

- *geometric*, constând în refacerea domeniului ocupat de structura studiată;
- *funcțional*, constând în realizarea modelului numeric.

În cadrul operației de asamblare trebuie avute în vedere următoarele aspecte:

- identificarea condițiilor de continuitate printre variabilele primare (relații între gradele de libertate locale şi gradele de libertate globale) prin legarea nodurilor elementelor la nodurile globale;
- identificarea condițiilor de echilibru printre variabilele secundare;
- asamblarea matricelor şi a vectorilor elementului.

Aşa cum s-a precizat şi anterior, caracteristicile şi ecuațiile unui element sunt analizate în raport cu un sistem de coordonate local ataşat fiecărui element finit în parte, în vederea uşurării calculelor de integrare şi diferențiere. Asamblarea se face însă, în raport cu un sistem de coordonate global, ataşat întregii structuri, ceea ce impune introducerea unui calcul suplimentar necesar *transformării de coordonate*.

Matricele de transformare diferă în funcție de tipul elementului finit utilizat pentru discretizarea structurii studiate. De exemplu, pentru a defini matricea de transformare în cazul unui element finit unidimensional cu noduri articulate, solicitat de sarcini aflate în planul structurii (structuri de tipul grinzilor cu zăbrele), se consideră elementul finit din figura 1.15 [22] împreună cu deplasările nodale reprezentate în sistemul global şi local de axe.

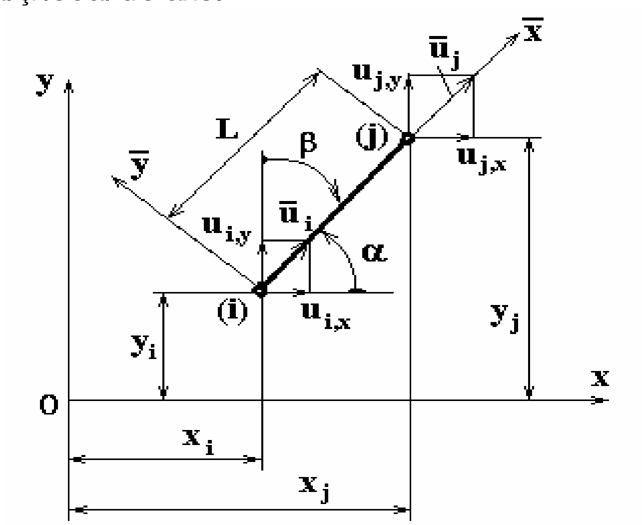


Fig. 1.15 Deplasările nodale în sistemul de coordonate local şi global pentru un element finit uniaxial

Axa $\overline{Ox}$ a sistemului local de coordonate face cu axele Ox şi Oy ale sistemului global, unghiul α şi respectiv unghiul β.

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i},\qquad \beta = \mathrm{arctg}\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}. \tag{1.7}$$

Cosinuşii directori ai axei $\overline{Ox}$ în raport cu sistemul global de axe vor fi:

$$l = \cos\alpha \text{ şi } m = \cos\beta = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha \tag{1.8}$$

Lungimea elementului finit definit de nodurile (i) şi (j) este:

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \tag{1.9}$$

În figura 1.16 este reprezentată deplasarea nodului (i) reprezentată în conformitate cu cele două sisteme de axe. Astfel vom avea:

$$AB = \bar{u}_i = AE + EB = AC \cdot \sin\alpha + CB \cdot \cos\alpha = u_{i,y} \cdot m + u_{i,x} \cdot l \tag{1.10}$$

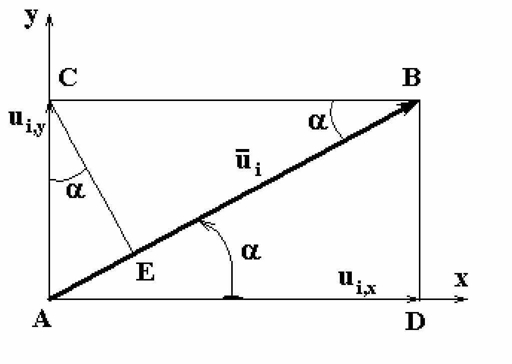


Fig. 1.16 Deplasarea nodului (i) reprezentată în sistemele de coordonate global şi local

În mod similar se poate exprima deplasarea nodului (j) prin intermediul celor două sisteme de coordonate:

$$\bar{u}_j = u_{j,x} \cdot l + u_{j,y} \cdot m \tag{1.11}$$

Ecuaţiile 1.10 şi 1.11 scrise sub formă matriceală vor avea următoarea formă:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{jy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{Bmatrix} \tag{1.12}$$

Sub formă condensată vom avea:

$$\{\bar{u}\} = [T] \cdot \{u\} \tag{1.13}$$

unde:

$\{\bar{u}\}$ este vectorul deplasărilor nodale, definit în raport cu sistemul local de referinţă;

$[T]$ este matricea de transformare de la sistemul local la sistemul global;

$\{u\}$ este vectorul deplasărilor nodale, definit în raport cu sistemul global de referinţă.

Matricea de transformare $[T]$ este o matrice ortogonală şi are proprietatea:

$$[T]^{-1} = [T]^T \tag{1.14}$$

Matricea de transformare $[T]$ se poate utiliza şi pentru a defini legătura dintre componentele forţelor, conform figurii 1.17, definite în cele două sisteme de axe [22].

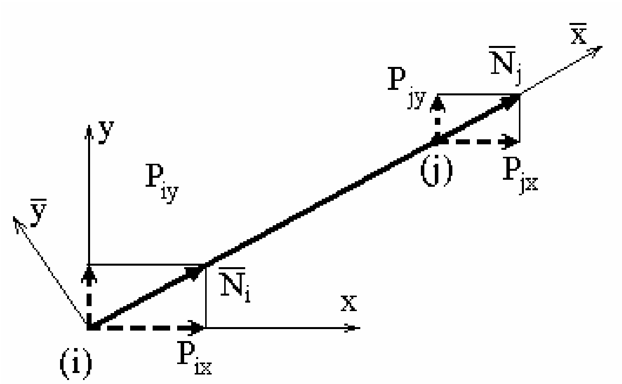


Fig. 1.17 Definirea forțelor de pe un element finit uniaxial în sistemele de coordonate global şi local

Vom avea în acest caz:

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{jy} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

Sub forma condensată relația 1.15 devine:

$$\{\bar{N}\} = [T] \cdot \{P\} \tag{1.16}$$

Matricea de rigiditate a elementului finit raportată la sistemul global de axe se defineşte prin utilizarea relațiilor 1.13, respectiv 1.16.

Dacă în relația 1.16 se înlocuieşte vectorul deplasare şi vectorul forță definit în sistemul local cu vectorul deplasare şi forță definit în sistemul global vom avea:

$$\{\bar{P}\} = [\bar{k}] \cdot \{\bar{u}\} \Rightarrow [T] \cdot \{P\} = [\bar{k}] \cdot [T] \cdot \{u\} \tag{1.17}$$

Dacă în ecuația 1.17 se înmulțeşte la stânga cu $[T]^{-1}$ vom avea:

$$\{P\} = [T]^{-1} \cdot [\bar{k}] \cdot [T] \cdot \{u\} \tag{1.18}$$

Relația 1.18 exprimă legătura între deplasările şi forțele corespunzătoare elementului finit, raportate la sistemul global de axe. Dacă se ține cont de ecuația:

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{P\} \tag{1.19}$$

rezultă:

$$[k] = [T]^{-1} \cdot [\bar{k}] \cdot [T] \tag{1.20}$$

unde: $[k]$ reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit raportată la sistemul global de axe.

În acest caz ecuația 1.17 devine:

$$[k] \cdot \{u\} = \{P\} \tag{1.21}$$

şi exprimă ecuația elementului finit raportată la sistemul global de axe.

În formă explicită matricea de rigiditate a elementului finit studiat în acest paragraf, raportată la sistemul global de axe va avea următoarea formă [22]:

$$[k]=\begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix}\cdot\frac{E\cdot A}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{E\cdot A}{L}\begin{bmatrix} l^2 & l\cdot m & -l^2 & -l\cdot m \\ l\cdot m & m^2 & -l\cdot m & -m^2 \\ -l^2 & -l\cdot m & l^2 & l\cdot m \\ -l\cdot m & -m^2 & l\cdot m & m^2 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

O altă modalitate de asamblare a matricelor elementelor finite este *asamblarea după elemente*, procedeu care este cel mai des utilizat în analiza cu elemente finite, datorită uşurinţei mari cu care se pot realiza subrutinele de asamblare. Acest procedeu are două etape succesive:

a.) *Expandarea*, prin intermediul căreia modelul matriceal al elementului se raportează la sistemul global. Coeficienţii matriceali nu suferă în acest caz modificări ci doar îşi schimbă poziţia prin trecerea de la sistemul local la cel global;

b.) *Asamblarea propriu-zisă*, care constă în suprapunerea modelelor expandate ale elementelor, astfel încât coeficienţii matriceali din două elemente vecine să se însumeze la nodurile comune.

În cazul în care derivarea modelului elemental se face variaţional, se foloseşte de regulă *asamblarea după noduri*. În acest caz asamblarea se face în noduri sau la interferenţele care sunt comune elementelor vecine. În aceste noduri continuitatea este stabilită în raport cu variabilele de stare şi posibil în raport cu derivatele sale.

1.5.5 Impunerea condiţiilor pe contur

În urma asamblării elementelor finite, rezultă un sistem de ecuaţii algebrice liniare de forma:

$$[K]\cdot\{\delta\}=\{P\} \tag{1.23}$$

Impunerea condiţiilor pe contur se face în funcţie de tipul condiţiilor la limită geometrice de tip Cauchy şi condiţii libere sau naturale de tip Neumann (derivata variabilei de câmp). Prin urmare, vor fi stabilite:

- gradele de libertate globale primare specificate; deplasări - valoarea la nodul final al elementului „i” este aceeaşi cu valoarea deplasării primului nod al elementului „i+1”;

- gradele de libertate secundare – echilibrul variabilelor secundare în nodurile de legătură. În nodurile de legătură, gradele de libertate au valoarea zero când nu există sursă exterioară şi valoarea F_i dacă sursa exterioară are această valoare.

Ca urmare a introducerii condițiilor de contur, sistemul de ecuații 1.23 va fi redus sau condensat la forma finală. Condițiile la limită sunt adesea prescrise prin valori egale cu zero sau constante (cum ar fi fixarea nodurilor unei structuri) sau ca o funcție de un vector (suporți elastici la care forțele sunt proporționale cu deplasarea, în cazul problemelor de mecanică şi vibrații). Impunerea condițiilor pe contur se face de regulă prin trei metode. După introducerea condițiilor de contur, sistemul de ecuații 1.23 se reduce la următoarea formă:

$$[K_r]\cdot\{\delta_r\}=\{P_r\} \tag{1.24}$$

care poartă numele de sistem de ecuații redus.

1.5.6 Metode de rezolvare a sistemului de ecuații redus

Metodele de rezolvare a sistemului de ecuații redus, pot fi grupate în două mari categorii: *metode directe* şi *metode iterative*.

Metodele directe utilizează un număr finit de operații elementare (adunare, înmulțire, extragerea rădăcinii pătrate) asupra matricelor $[K_r]$ şi $\{d_r\}$ pentru a obține soluția sistemului de ecuații 1.24. Principalele metode de rezolvare din cadrul acestei categorii sunt:

- regula lui Cramer, care este însă greoaie pe măsură ce creşte mărimea determinantului matricei $[K_r]$;
- metoda lui Gauss (metoda eliminării), care constă în eliminarea necunoscutelor. O variantă a acestei metode este metoda Gauss-Jordan, care constă în diagonalizarea sistemului;
- metoda Choletsky (metoda rădăcinii pătrate), care este un procedeu ce permite eliminarea necunoscutelor, fiind o metodă ce se pretează la rezolvarea cu ajutorul calculatorului;
- metoda celor mai mici pătrate.

Metodele iterative consideră o valoare inițială a soluțiilor şi cu ajutorul unui algoritm se generează o succesiune de soluții aproximative, care în mod normal, trebuie să conveargă către soluția exactă. Aceste metode utilizează matricele nemodificate ale sistemului 1.24 în fiecare iterație, motiv pentru care cantitatea de memorie necesară este mult mai mică decât memoria cerută să stocheze vectorul procesului de iterație. Astfel, dacă memoria calculatorului este suficientă, câteva porțiuni din matricea originală pot fi păstrate în memoria calculatorului. În ultima perioadă metodele iterative au devenit mult mai populare datorită faptului că problemele studiate sunt din ce în ce mai complexe şi necesită un spațiu mare de memorie. Viteza de convergență a metodelor iterative depinde de tipul problemei ce trebuie rezolvată precum şi de valorile numerice reale. Precondiționările sunt utilizate pentru a reduce numărul iterațiilor astfel încât metoda să conveargă la soluția reală. Principalele metode din cadrul acestei grupe sunt: *metoda Jacobi*, *metoda Gauss-Seidel*, *metoda relaxării* şi *metoda gradientului conjugat*.

Rezultatele analizei cu elemente finite constau din valorile numerice care rezultă din rezolvarea ecuațiilor de forma 1.24. În cazul analizelor structurale, aceste rezultate sunt: deplasările nodurilor şi reacțiunile din dreptul reazemelor. Alte rezultate, cum ar fi: forțe, tensiuni şi deformații sunt mărimi derivate obținute din deplasări.

1.5.7 Interpretarea rezultatelor

O etapă foarte importantă în analiza cu elemente finite o constituie interpretarea rezultatelor obținute, deoarece pe parcursul rezolvării problemei sau după obținerea rezultatelor, se nasc câteva întrebări, cum ar fi: Cât de bune sunt rezultatele obținute?, Ce se poate face cu aceste rezultate? etc.

Răspunsul la aceste întrebări finalizează analiza problemei sau cere ca anumite etape prezentate anterior să fie repetate. De regulă, pentru a putea răspunde la întrebările anterioare, sunt necesare a se parcurge două etape:

1. Validarea modelului. De regulă, această validarea ia foarte mult timp. Utilizatorul metodei trebuie să verifice rezultatele corespunzătoare care să satisfacă modelul de calcul. Validarea momentului este afectată în principal de performanța globală a modelului pentru fiecare set de condiții de contur analizate. În afară de cazul în care rezultatele sunt dorite pentru compararea lor cu rezultatele obținute prin alte metode (experimentale, analitice etc.) rezultatele pot fi utilizate într-o situație concretă corectă.

2. Interpretarea rezultatelor. Prin interpretarea rezultatelor după validare, acestea arată modul în care lucrează structura studiată. Pe de altă parte pot fi cerute valorile maxime pentru a fi comparate cu cele admisibile sau cu valori obținute în anumite cazuri particulare. De asemenea este important ca rezultatele să fie prezentate într-o formă care să permită o bună înțelegere, fără o cunoaştere prealabilă a

modelului. În acest caz rezultatele pentru structurile mecanice pot fi grupate sub următoarele forme:

- reprezentarea formei deplasărilor;
- reprezentarea conturului piesei deformate şi nedeformate;
- reprezentarea forţelor şi momentelor din dreptul reazemelor;
- reprezentarea tensiunilor şi deformaţiilor pe contur;
- reprezentarea direcţiilor tensiunilor principale;
- calculul energiei de deformaţie;
- listarea tensiunilor şi deformaţiilor în ordine crescătoare sau descrescătoare etc.

Este important ca părţi ale structurii să fie arătate în formă grafică iar direcţiile axelor sistemului de coordonate să fie clar arătate şi explicate. Dacă valorile numerice sunt incluse, localizarea nodurilor, elementelor sau secţiunilor la care se referă trebuie să fie prezentate grafic, iar convenţiile de semne să fie clar explicate. Pentru elementele finite de tip beam şi shell este necesară convenţia de semne pentru forţe şi momente, iar în anumite cazuri ele sunt convertite în tensiuni, caz în care convenţiile pentru localizarea suprafeţelor şi fibrelor este necesară.

1.5.8 Exemplu de calcul numeric aproximativ pentru o grindă de secțiune variabilă solicitată axial

În paragraful de față se vor determina (urmând etapele prezentate în capitolul de față) tensiunile şi eforturile dintr-o bară verticală încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, solicitată pe direcție axială de către o sarcină concentrat aplicată *P* (fig. 1.18, a). Structura va fi împărțită în 4 elemente finite (fig. 1.18, b). cu noduri articulate, fiecare nod având un grad de libertate (deplasare pe direcția solicitării), în total structura având 5 noduri (fig. 1.18, c).

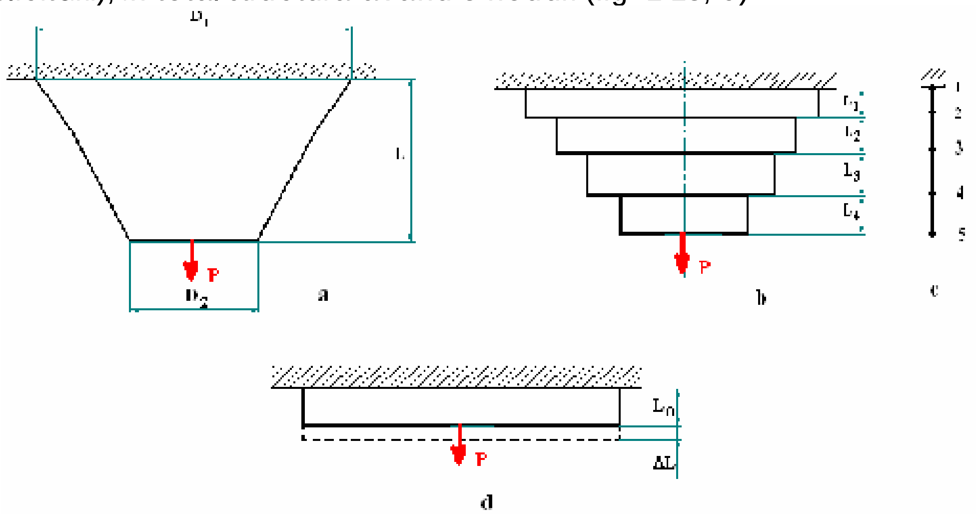


Fig. 1.18 Bară verticală încastrată la un capăt şi liberă la celălat solicitată la tracțiune

1. Definirea caracteristicilor geometrice, şi de material a structurii.

$L = 260\,[mm]$ - lungimea structurii studiate;

$D_1 = 60\,[mm]$ - diametrul maxim al structurii;

$D_2 = 20\,[mm]$ - diametrul minim al structurii;

$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 65\,[mm]$ - lungimea unui element finit;

$E = 210 \cdot 10^3\,[MPa]$ - modulul de elasticitate al materialului structurii;

$P = 100 \cdot 10^3\,[N]$ - sarcina concentrat aplicată care solicită structura;

$A_1 = 2375{,}83\,[mm^2]$ - aria medie a secțiunii transversale a elementului 1;

$A_2 = 1590{,}43\,[mm^2]$ - aria medie a secțiunii transversale a elementului 2;

$A_3 = 962{,}11\,[mm^2]$ - aria medie a secțiunii transversale a elementului 3;

$A_4 = 490{,}87\left[mm^2\right]$ - aria medie a secțiunii transversale a elementului 4.

2. Calculul matricelor de rigiditate elementale şi atribuirea unui „nume” fiecărui termen din matricele de rigiditate elementale, în vederea generării matricei de rigiditate globale a structurii:

$$K_1 = \frac{E \cdot A_1}{L_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}67 \cdot 10^6 & -7{,}67 \cdot 10^6 \\ -7{,}67 \cdot 10^6 & 7{,}67 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \frac{E \cdot A_2}{L_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}14 \cdot 10^6 & -5{,}14 \cdot 10^6 \\ -5{,}14 \cdot 10^6 & 5{,}14 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \frac{E \cdot A_3}{L_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}12 \cdot 10^6 & -3{,}12 \cdot 10^6 \\ -3{,}12 \cdot 10^6 & 3{,}12 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \frac{E \cdot A_4}{L_4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}59 \cdot 10^6 & -1{,}59 \cdot 10^6 \\ -1{,}59 \cdot 10^6 & 1{,}59 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

3. Calculul matricei de rigiditate globale a structurii şi obținerea matricei de rigiditate reduse, prin eliminarea liniilor şi coloanelor corespunzătoare deplasărilor nodale împiedecate (în cazul de față deplasarea nodului 1):

$$K_g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{21} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22}+c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22}+d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 & 0 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$ matricea de rigiditate globală a structurii.

$$K_g = \begin{pmatrix} a_{22}+b_{21} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22}+c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{21} & c_{22}+d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$ matricea de rigiditate redusă a structurii.

4. Rezolvarea ecuației structurale şi aflarea deplasărilor nodale:

$$\{\delta_r\} = [K_r]^{-1} \cdot \{P_r\},$$

unde: $\{P_r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$ este vectorul redus al încărcărilor de pe structură.

În urma rezolvării acestei ecuații structurale, se obțin deplasările (în mm) a nodurilor structurii:

$$\{\delta_r\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}1300 \\ 0{,}0325 \\ 0{,}0647 \\ 0{,}1277 \end{Bmatrix},$$ deplasarea nodului 1 fiind, aşa cum s-a precizat anterior, împiedecată, deci $u_1 = 0$.

5. Calculul tensiunilor şi eforturilor ce apar în elementele finite ale structurii, presupunând că materialul respectă legea lui Hooke:

$$\sigma_1 = \frac{E}{L_1} \cdot (u_2 - u_1) = 42{,}091\ [MPa];$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{L_2} \cdot (u_3 - u_2) = 62{,}88\ [MPa];$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{L_3} \cdot (u_4 - u_3) = 103{,}938\ [MPa]; \sigma_4 = \frac{E}{L_4} \cdot (u_5 - u_4) = 203{,}72\ [MPa].$$

Eforturile din fiecare element finit se calculează cu relația de forma:

$N_i = A_i \cdot \sigma_i$, unde: i = 1...4

şi au valoarea:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 100 \cdot 10^3\ [N]$$